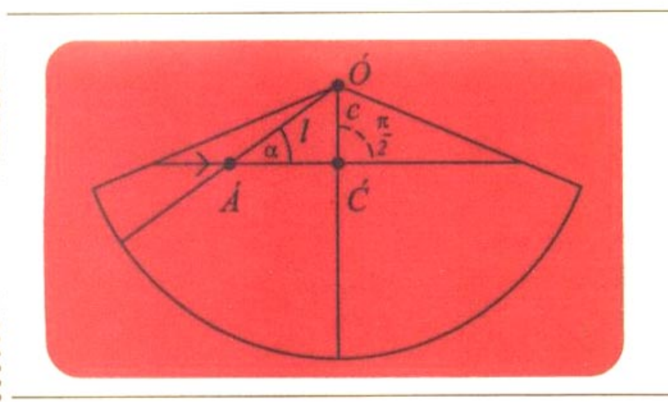
Lecciones populares de matemáticas

LINEAS MÁS CORTAS
Problemas de variaciones

L. A. Liustérnik



Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Л. А. ЛЮСТЕРНИК

КРАТЧАЙШИЕ ЛИНИИ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

L. A. LIUSTÉRNIK

LÍNEAS MÁS CORTAS
PROBLEMAS DE VARIACIONES

Segunda edición

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por el ingeniero
K. Medkov

Primera edición 1975

Segunda edición 1985

на испанском языке

IMPRESO EN LA URSS. 1979

INDICE

INTRODUCCIÓN

En este folleto se estudia, desde el punto de vista elemental, una serie de así llamados problemas de variaciones. En dichos problemas se consideran las magnitudes dependientes de una curva y se busca la curva para la que tal o cual magnitud alcanza su valor máximo o mínimo. De este género son, por ejemplo, los problemas siguientes: hállese una curva más corta de todas las curvas que en cierta superficie unen dos puntos; o bien, hállese en un plano entre todas las curvas cerradas de longitud prefijada aquella curva que limita un área máxima, etc.

La materia que se contiene en este folleto se exponía por el autor en las conferencias dictadas en los círculos matemáticos escolares de la Universidad estatal de Moscú. El contenido de la primera conferencia (§§ 1 – 10) coincide, en lo esencial, con el expuesto por el autor en el folleto "Líneas geodésicas" editado en 1940.

Se supone que el lector esté familiarizado sólo con el curso de matemáticas elementales. Los primeros capítulos tienen un carácter plenamente elemental, los otros, por lo contrario, aunque no exigen conocimientos especiales, requieren que el lector tenga mayor pericia en lectura y reflexiones matemáticas.

Todo el folleto se lo puede considerar como introducción elemental en el cálculo de variaciones (así se llama un apartado de las matemáticas en el cual se estudian sistemáticamente los problemas de búsqueda de los máximos o mínimos de funcionales). El cálculo de variaciones no constituye el apartado inicial del curso de Matemáticas Superiores que se estudia, por ejemplo, en las escuelas superiores técnicas. No obstante, nuestra convención es que para un hombre que procede al estudio del curso de Matemáticas Superiores no es sino útil echar una ojeada más adelante.

Para un lector familiarizado con los elementos del análisis matemático no será difícil hacer enteramente rigurosas algunas definiciones y consideraciones, que en el libro han sido expuestas de manera no muy estricta (las consideraciones explicativas para ello se dan a menudo en el texto en gallarda); es necesario, por ejemplo, hablar no de unas magnitudes pequeñas y su igualdad aproximada, sino de los infinitésimos y su equivalencia. Si, no obstante, un lector más exigente queda insatisfecho del nivel de rigurosidad aceptado en la obra y de la perfección lógica de

consideraciones, qué esto le sirva de explicación de la necesidad en aquel "pulido" lógico de los conceptos fundamentales del análisis matemático con que él se encuentre en los cursos universitarios de esta ciencia. Sin tal "pulido" no es posible la exposición rígida y sistemática de los capítulos relacionados al cálculo de variaciones.

El análisis matemático elaboró un aparato analítico potente que a veces es capaz de resolver automáticamente muchos problemas más difíciles. Sin embargo, en cada etapa del estudio de las matemáticas es de mayor importancia el saber ver un simple sentido geométrico o físico del problema que se resuelve. Es necesario saber encontrar cada vez una demostración sencilla y clara aunque no sea muy rigurosa.

Si este folleto contribuye, en cierta medida, a desarrollar en los lectores estos elementos de la cultura matemática, el autor será contento de que su labor fue útil.

CONFERENCIA 1

CAPÍTULO I. LÍNEAS MÁS CORTAS EN LAS SUPERFICIES ELEMENTALES

§ 1. LÍNEAS MÁS CORTAS EN LAS SUPERFICIES POLIÉDRICAS

1. LÍNEA MÁS CORTA EN UN ÁNGULO DIEDRO. El lector está al tanto, por supuesto, que un segmento rectilíneo es la línea más corta de todas las que unen en el plano dos puntos.

Consideraremos ahora dos puntos A y B en una superficie arbitraria; se puede unirlos con una infinidad de diferentes líneas que se disponen sobre esta superficie. ¿Mas, cuál de estas líneas es la más corta? En otras palabras ¿cómo se debe mover por la superficie para llegar al punto B, partiendo del punto A y siguiendo el camino más corto?

Resolvamos, al principio, este problema para ciertas superficies elementales. Iniciaremos con un problema del tipo siguiente: sea dado un ángulo diedro[1] de caras Q_1, Q_2 y de arista MN; en las caras mencionadas están dados dos puntos: el punto A en Q_1, y el punto B en Q_2 (fig. 1). Los puntos A y B pueden unirse por una infinidad de diferentes líneas dispuestas en las caras Q_1 y Q_2 del ángulo diedro. Hállese una línea más corta de todas estas líneas.

Si el ángulo diedro es igual a dos ángulos rectos (180°), entonces las caras Q_1 y Q_2 constituyen la prolongación una de otra (es decir, constituyen un plano) y la línea más corta que se busca es el segmento rectilíneo AB que une los puntos A y B. En el caso de que un ángulo diedro no sea igual a dos ángulos rectos, las caras Q_1 y Q_2 no continúan una a otra y el segmento AB no está dispuesto en estas caras. Hagamos girar una de las caras alrededor de la recta MN de tal modo que ambas caras se hagan la prolongación una de otra o, en otras palabras, desarrollemos el ángulo diedro en el plano (fig. 2). Las caras Q_1 y Q_2 pasarán en los semiplanos Q'_1 y Q'_2. La recta MN se transformará en la recta $M'N'$ que separa Q'_1 de Q'_2; los puntos A y B pasarán en los puntos A' y B' (A' se halla en Q'_1; B', en Q'_2); toda línea, que se halla en las caras del ángulo diedro

[1] En la fig. 1 está dibujada sólo una *parte* de este ángulo diedro infinito.

y que une los puntos A y B, se transformará en la línea de la misma longitud que en nuestro plano une los puntos A' y B'. La línea más corta en las caras del ángulo diedro, que une los puntos A y B, pasará en la línea más corta que une en el plano los puntos A' y B', es decir, en el segmento rectilíneo $A'B'$. Este segmento corta la línea $M'N'$ en un punto C', con la particularidad de que los ángulos $A'C'M'$ y $N'C'B'$ son iguales como ángulos verticales (fig. 2). Designemos con α la magnitud de cada uno de estos ángulos.

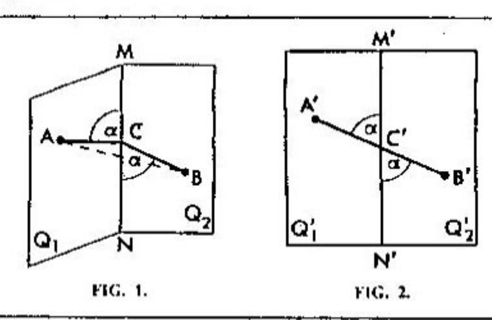


FIG. 1. FIG. 2.

Ahora hagamos girar Q'_1 y Q'_2 alrededor de $M'N'$ de una manera tal que de nuevo se obtenga el ángulo diedro original. Los semiplanos Q'_1 y Q'_2 se transformarán, otra vez, en las caras Q_1 y Q_2 de este ángulo diedro; $M'N'$ se hará su arista MN, y los puntos A' y B' pasarán en los puntos A (en la cara Q_1) y B (en la cara Q_2); el segmento rectilíneo $A'B'$ pasará en la línea más corta que se dispone en las caras del ángulo diedro y que une los puntos A y B. Esta línea más corta es, obviamente, la quebrada ACB cuyo eslabón AC se halla en la cara Q_1 y CB, en la cara Q_2. Es evidente que los ángulos ACM y NCB en los que se han transformado los ángulos equivalentes $A'C'M'$ y $N'C'B'$, son iguales a α como antes y, por consiguiente, son iguales entre sí. Así pues, la *línea más corta de las que se disponen en las caras del ángulo diedro y unen sus dos puntos A y B (dispuestos en sus caras diferentes) es la quebrada ACB con su vértice C en la arista MN, con la particularidad de que los ángulos ACM y NCB, formados por los eslabones de la quebrada y la arista, son iguales.*

Al problema examinado se le da, a veces, un carácter semichistoso. Una mosca quiere arrastrarse del punto A dispuesto en una pared, al punto B que se halla en la pared lindante. ¿Cómo debe

desplazarse por las paredes para que su camino del punto A al punto B sea el más corto? Ahora no hay dificultad de encontrar la solución.

2. LÍNEA MÁS CORTA EN UNA SUPERFICIE POLIÉDRICA. Pasemos a considerar un caso algo más complejo. Está dada una superficie poliédrica (fig. 3) que se compone de varias caras Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, ..., Q_n con las aristas M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, ..., $M_{n-1}N_{n-1}$ (en la fig. 3 $n = 4$). En dos caras diferentes de esta superficie

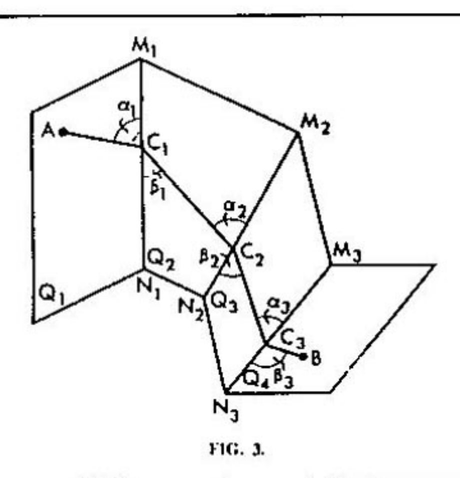


FIG. 3.

poliédrica (por ejemplo, en Q_1 y Q_4) están determinados los puntos A y B. Hállese, en esta superficie poliédrica, una línea más corta que una los puntos A y B.

Sea AB la línea más corta y pase por las caras Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Desarrollemos una parte de la superficie poliédrica, compuesta de estas caras, en el plano (fig. 4). En este caso las caras se transformarán en los polígonos de este plano Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4, y las aristas M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, a lo largo de las cuales se apretaban una a otra las caras Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, se convertirán en los lados $M'_1N'_1$, $M'_2N'_2$, $M'_3N'_3$ de los polígonos Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4 por los cuales estos últimos se aprietan uno a otro. Los puntos A y B pasarán en los puntos A' y B' del plano, mientras que las líneas que los unen en la parte de la superficie poliédrica que se desarrolla, pasarán en las líneas del plano que unen los puntos A' y B'. La línea más corta de las que unen A y B pasará en la línea plana más corta que une los puntos A' y B', es decir,

en el segmento rectilíneo $A'B'$ [1]. Aquí se repiten plenamente los razonamientos anteriores: los ángulos verticales α_1 y β_1, formados por la recta $A'B'$ y el lado $M'_1N'_1$, son iguales; del mismo modo son iguales dos a dos los ángulos verticales α_2 y β_2, α_3 y β_3, que están formados por la recta $A'B'$ con los lados $M'_2N'_2$, $M'_3N'_3$ (fig. 4).

Si doblamos de nuevo una parte del plano compuesta de nuestros polígonos, en la superficie poliédrica de tal manera que el polígono Q'_1 se transforme otra vez en la cara Q_1, el polígono

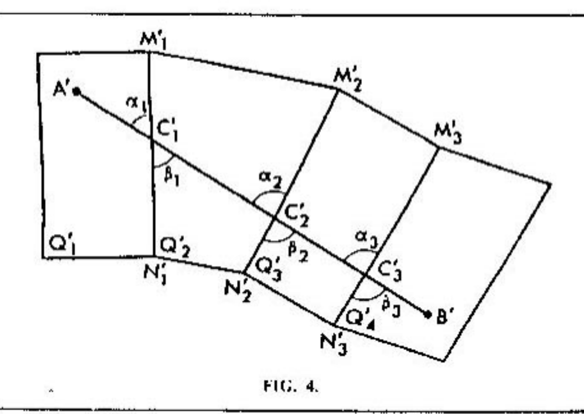


FIG. 4.

Q'_2 en la cara Q_2, el polígono Q'_3 en la cara Q_3, y, por fin, el polígono Q'_4 en la cara Q_4, entonces los puntos A' y B' pasarán en los puntos A y B, mientras que el segmento $A'B'$ se transformará en la línea $\widehat{AB}$, es decir en la línea más corta de todas en la superficie poliédrica que unen los puntos A y B. Esta línea más corta será la quebrada cuyos vértices se disponen en las aristas M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 de la superficie poliédrica. Los ángulos α_1 y β_1 (así como α_2 y β_2, α_3 y β_3), que forman con la arista de la superficie dos eslabones contiguos de la quebrada, son iguales.

3. LÍNEA MÁS CORTA EN LA SUPERFICIE LATERAL DE UN PRISMA. En la fig. 5 está dibujada un prisma [2] y la línea más corta de todas las líneas en su superficie que unen dos puntos A y B, dispuestos

[1] Aquí no se considera el caso en que $A'B'$ corta otros lados de estos polígonos.

[2] Las caras del prisma se imaginan ilimitadamente continuas.

en las caras diferentes del prisma. Esta línea más corta es la quebrada con los vértices C_1, C_2, C_3 en las aristas del prisma, con la particularidad de que los ángulos, que forman sus dos eslabones contiguos con la arista del prisma en la que se ubica su vértice común, son iguales en virtud de lo dicho anteriormente:

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \alpha_3 = \beta_3, \ \ldots$$

Pero, además, tenemos: $\beta_1 = \alpha_2$.

Efectivamente, estos ángulos son alternos internos dentro de las paralelas M_1N_1 y M_2N_2 y la secante C_1C_2. Del mismo modo $\beta_2 = \alpha_3$.

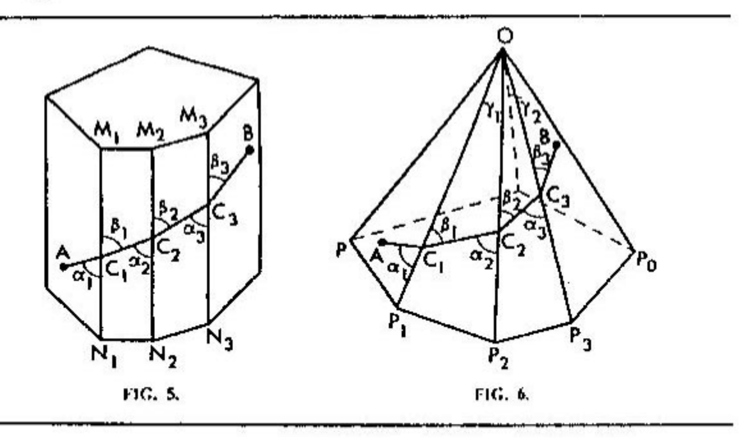


FIG. 5. FIG. 6.

Por consiguiente, tenemos:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \ldots$$

En otras palabras, los *ángulos formados por los eslabones de la quebrada más corta AB en la superficie del prisma y todas las aristas de éste, son iguales.*

4. LÍNEA MAS CORTA EN LA SUPERFICIE DE UNA PIRÁMIDE. Supongamos que en dos caras laterales de una pirámide[1] con el vértice O están dados dos puntos A y B (fig. 6). Estos puntos pueden ser unidos en la superficie de la pirámide por una infinidad de líneas entre las cuales existe la línea más corta $\overset{\frown}{AB}$. En virtud de lo dicho más arriba, $\overset{\frown}{AB}$ es una línea quebrada cuyos vértices C_1,

[1] Las caras de la pirámide se imaginan ilimitadamente continuas.

C_2, C_3 ... se ubican en las aristas de la pirámide y los ángulos α_1 y β_1, α_2 y β_2, α_3 y β_3, ..., formados por los eslabones de esta quebrada con las aristas de la pirámide, son iguales dos a dos:

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \alpha_3 = \beta_3, \ \ldots$$

Examinemos la cara P_1OP_2 en la que se dispone el eslabón C_1C_2; si γ_1 es el ángulo P_1OP_2, el ángulo α_2 en el triángulo C_1OC_2 es exterior, mientras que los ángulos β_1 y γ_1 son interiores. Un ángulo exterior de un triángulo equivale a la suma de los ángulos interiores no contiguos con el primero. Por consiguiente,

$$\alpha_2 = \beta_1 + \gamma_1 \quad \text{ó} \quad \alpha_2 - \beta_1 = \gamma_1.$$

Mas, puesto que $\beta_1 = \alpha_1$, entonces $\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma_1$.

Análogamente, $\alpha_3 - \alpha_2 = \gamma_2$, donde γ_2 es el ángulo en el vértice O, formado por las aristas laterales vecinas OP_2 y OP_3, etc.

De este modo, la *diferencia entre los ángulos, bajo los cuales la línea más corta se interseca con dos aristas cualesquiera de la pirámide, es igual a la suma de los ángulos planos correspondientes en el vértice.*

§ 2. LÍNEAS MÁS CORTAS EN LA SUPERFICIE DE UN CILINDRO

1. LÍNEA MÁS CORTA EN LA SUPERFICIE DE UN CILINDRO. Pasemos ahora a la búsqueda de las líneas más cortas en ciertas elementales superficies curvas. Empezaremos con la superficie de un cilindro redondo[1].

Recordemos previamente que la superficie de un cilindro se puede cubrir con un sistema de líneas rectas paralelas al eje del cilindro y, por tanto, paralelas una a otra. Estas rectas se denominan *generatrices* del cilindro.

Tomemos en la superficie del cilindro dos puntos A y B (fig. 7). Buscaremos entre las curvas que se disponen en el cilindro y unen los puntos A y B, la curva de menor longitud. Designemos por $\overset{\frown}{AB}$ esta curva más corta que une los puntos A y B. Consideremos primero el caso en que A y B no se ubican en una misma generatriz.

---

[1] La superficie del cilindro *finito* en consideración (fig. 7) es una parte de la superficie del cilindro infinito.

Cortemos la superficie lateral del cilindro a lo largo de la generatriz PQ (que no corta $\overset{\frown}{AB}$) y desarrollémosla en un plano; obtendremos cierto rectángulo (fig. 8) (un par de los lados del rectángulo, $P'P''$ y $Q'Q''$, se originó del desarrollo de las circunferencias que limitan la superficie lateral del cilindro; otro par, $P'Q'$ y $P''Q''$, se ha formado de dos bordes del corte PQ). Las generatrices del cilindro se transformarán en las rectas paralelas al lado $P'Q'$ del rectángulo. Los puntos A y B pasarán en los

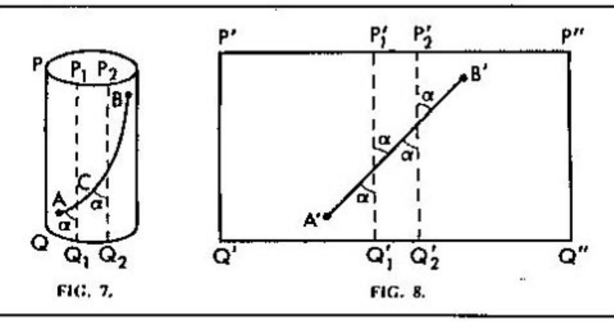


FIG. 7. FIG. 8.

puntos A' y B', ubicados dentro del rectángulo. Las líneas que en el cilindro unen los puntos A y B, pasarán en unas lineas planas que unen los puntos A' y B' dentro del rectángulo. El arco $\overset{\frown}{AB}$ que es una línea más corta de todas las líneas en el cilindro que unen los puntos A y B, pasará en la línea más corta de las lineas planas que unen los puntos A' y B', es decir, en el segmento rectilíneo $A'B'$. Así, pues, desarrollada la superficie lateral del cilindro en el rectángulo plano, el *arco más corto* $\overset{\frown}{AB}$ *en la superficie del cilindro pasa en el segmento rectilíneo* $A'B'$. Las generatrices del cilindro P_1Q_1, P_2Q_2, ..., pasan en las rectas $P'_1Q'_1$, $P'_2Q'_2$, ..., paralelas a los lados $P'Q'$, $P''Q''$ del rectángulo $P'Q'Q''P''$. Los ángulos, que el segmento $A'B'$ forma con estas rectas, son iguales como ángulos correspondientes entre las líneas paralelas. Designemos con α el valor de cada uno de ellos.

Ahora arrollemos el rectángulo $P'Q'Q''P''$ (pegando sus lados opuestos $P'Q'$ y $P''Q''$) de modo tal que éste tome de nuevo la forma original de cilindro. Los puntos A' y B' pasarán, otra vez, en los puntos A y B del cilindro y el segmento rectilíneo $A'B'$, que los une, en el arco más corto $\overset{\frown}{AB}$ en la superficie del cilindro; los ángulos formados por el segmento $A'B'$ y las recras $P'_1Q'_1$,

$P'_2Q'_2$ se convertirán en los ángulos iguales a éstos y formados por el arco $\widehat{AB}$ y las generatrices P_1Q_1, P_2Q_2, ... del cilindro. Dado que la recta $A'B'$ cortó todas las rectas paralelas a $P'Q'$ bajo los ángulos iguales α, *el arco más corto* $\widehat{AB}$ en el cual pasa $A'B'$ *cortará todas las generatrices del cilindro bajo los ángulos iguales* α (fig. 7).

Examinemos un caso peculiar, cuando los puntos A y B se ubican en una misma generatriz (fig. 9). Es evidente que en este caso el *segmento AB de la generatriz constituirá la distancia más corta entre los puntos A y B en la superficie del cilindro.*

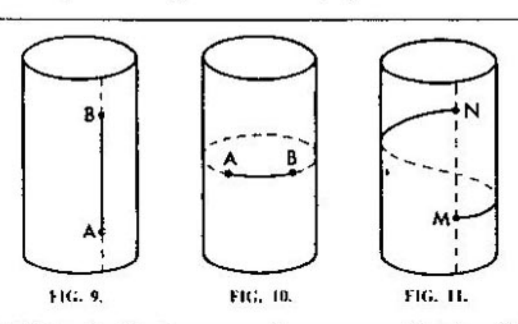


FIG. 9. FIG. 10. FIG. 11.

Destaquemos un caso más en que los puntos A y B se ubican en una misma sección circular del cilindro (fig. 10). El arco $\widehat{AB}$ *de esta sección es perpendicular a todas las generatrices y sirve de arco más corto que une los puntos A y B.*

Si cortamos el cilindro a lo largo de una generatriz, que no se interseca con el arco $\widehat{AB}$, y lo desarrollamos en un rectángulo plano, entonces en los dos casos peculiares considerados arriba, el arco más corto pasará en un segmento paralelo a los lados del rectángulo. En todos los demás casos la línea más corta se interseca con las generatrices bajo un ángulo distinto del ángulo recto (y no igual a cero)[1].

2. LINEAS HELICOIDALES. Se llama *línea helicoidal* a una línea en la superficie del cilindro que corta todas las generatrices de éste bajo los ángulos iguales, distintos del ángulo recto.

[1] Es interesante comparar nuestro problema de buscar la línea más corta en la superficie de un cilindro con el considerado en la pág. 12 en que se buscaba la quebrada más corta en la superficie de un prisma (y para el cual nuestro problema es límite).

Designemos con α el ángulo formado por una línea helicoidal y una generatriz. Una línea que se interseca con las generatrices del cilindro bajo el ángulo recto constituye una sección circular. La sección circular puede considerarse como caso límite de la línea helicoidal, cuando α se hace un ángulo recto. Del mismo modo, la generatriz del cilindro puede considerarse como otro caso límite en que α se hace nulo.

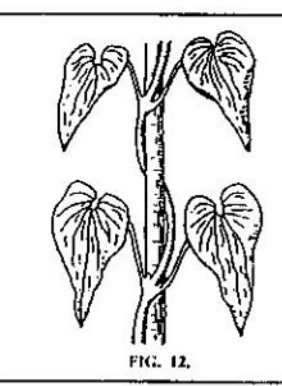


FIG. 12.

Examinemos dos géneros del movimiento por la superficie del cilindro: el movimiento paralelo al eje (por la generatriz) y la rotación alrededor del eje (por la sección circular) con velocidades constantes.

Cada uno de estos movimientos puede efectuarse en dos direcciones opuestas. Convengamos en que el movimiento hacia arriba en el cilindro vertical sea positivo, hacia abajo, negativo. Convengamos también en considerar *positiva la rotación* en el cilindro vertical de derecha a la izquierda (para el que está orientado a lo largo del eje con la cabeza arriba), o sea en sentido antihorario. Y que sea *negativa la rotación* de izquierda a derecha, esto es, en sentido horario.

El movimiento helicoidal resulta de la adición de dos movimientos: un movimiento paralelo al eje del cilindro y la rotación alrededor del eje. La línea helicoidal se denomina *derecha*, si el movimiento por ella hacia arriba se combina con la rotación positiva, es decir, de derecha a la izquierda (fig. 11), y se llama *izquierda*, si el movimiento por ella hacia arriba se acompaña de rotación negativa (de izquierda a derecha).

La mayoría de las plantas trepadoras (enredadera, habichuela), enredando por los apoyos verticales, toman la forma de líneas

helicoidades derechas (fig. 12). Por otro lado, el lúpulo, por ejemplo, toma la forma de la linea helicoidal izquierda (fig. 13).

Supongamos que moviendo a lo lărgo de la línea helicoidal un punto cortará cierta generatriz en el punto M, y, siguiendo el movimiento por la linea helicoidal el punto móvil cortará otra vez la misma generatriz en el punto N; al cubrir el arco $\overset{\frown}{MN}$ de la línea helicoidal el punto da una vuelta completa alrededor del eje del cilindro; al mismo tiempo el punto se desplaza hacia



FIG. 13.

arriba a la distancia igual a la longitud del segmento MN (fig. 11). Si la velocidad del movimiento giratorio es nula y el punto sólo se desplaza por la generatriz paralelamente al eje del cilindro, llega el primer caso limite; otro caso limite se obtendrá, si la velocidad del desplazamiento paralelo al eje del cilindro es nula, y el punto sólo gira alrededor del eje, describiendo una circunferencia.

De todo lo que hemos dicho arriba se infiere el.

TEOREMA. *En la superficie de un cilindro, el arco mas corto $\overset{\frown}{AB}$ que une dos puntos dados A y B, es el arco de la linea helicoidal.*

3. ARCOS HELICOIDALES QUE UNEN DOS PUNTOS DADOS. Dos puntos en la superficie de un cilindro pueden ser unidos por varios arcos helicoidales. En efecto, supóngase que dos puntos en la superficie del cilindro están unidos por medio del arco más corto $\widehat{AB}$; este arco es el arco de la línea helicoidal y, siendo desarrollada la superficie del cilindro (cortada a lo largo de una generatriz que no se interseca con el arco $\widehat{AB}$) en un rectángulo plano, se transformará en un segmento rectilíneo (figs. 7 y 8).

Cortemos ahora el cilindro a lo largo de la generatriz P_1Q_1 que se interseca con el arco más corto $\widehat{AB}$ en el punto C (fig. 7). La línea $\widehat{AB}$ resultará cortada en dos partes, $\widehat{AC}$ y $\widehat{CB}$. Si

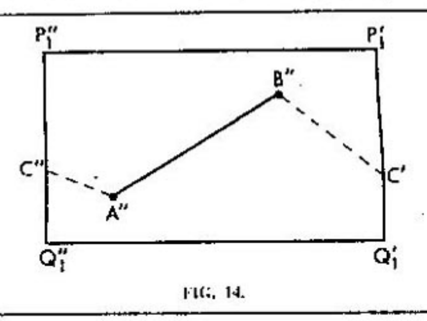


FIG. 14.

desarrollamos la superficie del cilindro en un rectángulo plano, los puntos A y B pasarán en los puntos A'' y B'' del rectángulo (fig. 14), y las partes $\widehat{AC}$ y $\widehat{CB}$ del arco $\widehat{AB}$ se transformarán en los segmentos rectilíneos $A''C''$ y $B''C'$, respectivamente. Mas, los puntos A'' y B'' pueden unirse mediante el segmento rectilíneo $A''B''$, dispuesto dentro del rectángulo $P'_1Q'_1Q''_1P''_1$. Obviamente, $A''B''$ es más corta que toda otra línea, que se dispone dentro de este rectángulo y une los puntos A'' y B''.

Arrollemos de nuevo nuestro rectángulo en el cilindro, pegando los lados laterales $P'_1Q'_1$ y $P''_1Q''_1$ de modo tal, que el punto C' coincida con el punto C'' y ocupe la posición C; en este caso los puntos A'' y B'' pasarán, otra vez, en los puntos A y B en la superficie del cilindro, mientras que los segmentos $A''C''$ y $B''C'$ pasarán en el arco $\widehat{AB}$, la línea más corta de todas las líneas en la superficie del cilindro que une los puntos A y B. En lo que se refiere al segmento $A''B''$, éste pasará al arco de la línea helicoidal $\underset{\smile}{AB}$ que une los mismos puntos A y B. En la fig. 15,

$\overset{\frown}{AB}$ es un arco de la línea helicoidal derecha, y $\underset{\smile}{AB}$, de la línea helicoidal izquierda que pasa por los puntos A y B.

Las líneas que no cortan los lados del rectángulo, después de haberlo arrollado en el cilindro, pasarán en las líneas que no se intersecan con la generatriz P_1Q_1 (puesto que a lo largo de esta recta se han pegado los lados $P_1'Q_1'$ y $P_1''Q_1''$ de nuestro rectángulo). Entre estas líneas, la más corta será el arco $\underset{\smile}{AB} = \underset{\smile}{AmB}$ (fig. 15). Pero, ella puede no resultar la más corta de *todas* las líneas en la superficie del cilindro que unen los puntos A y B,

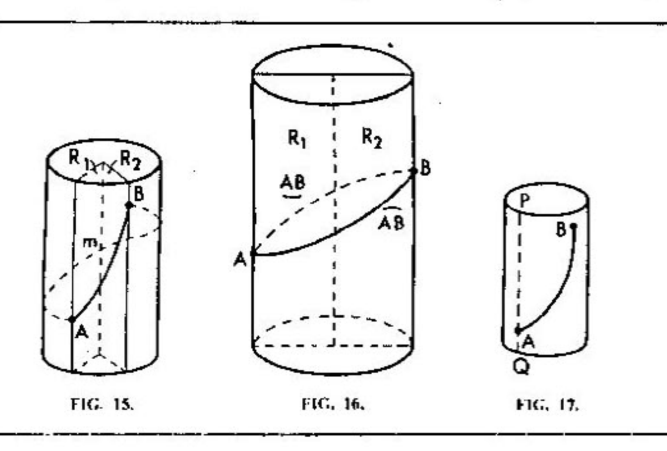


FIG. 15. FIG. 16. FIG. 17.

dado que si $\overset{\frown}{AB}$ es más corta que $\underset{\smile}{AB}$, entonces consecuentemente, $\underset{\smile}{AB}$ no es la línea más corta entre las curvas que se disponen en la superficie del cilindro y unen los puntos A y B.

Por el punto A y el eje del cilindro tracemos el semiplano R_1, y por el punto B y el eje del cilindro, el semiplano R_2 (fig. 15). Estos semiplanos forman dos ángulos diedros. En uno de ellos está contenido el arco $\overset{\frown}{AB}$, y en el otro, el arco $\underset{\smile}{AB}$. De estos dos arcos el más corto es aquel que se ubica dentro del ángulo diedro menor.

Si los semiplanos R_1 y R_2 constituyen la prolongación uno de otro (es decir, el ángulo entre ellos es igual a dos ángulos rectos), ambos arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\underset{\smile}{AB}$ son de igual longitud. En este caso en la superficie del cilindro existen dos líneas más cortas (de igual longitud) que unen los puntos A y B (fig. 16).

Los dos arcos helicoidales considerados, $\overset{\frown}{AB}$ y $\underset{\smile}{AB}$, que unen los puntos A y B, poseen una propiedad común: desplazándonos por uno de ellos del punto A al punto B, nosotros no damos la vuelta completa alrededor del eje del cilindro.

Supongamos ahora que alrededor del cilindro está enrollada repetidas veces una larga hoja rectangular de papel (que coincidan su anchura y la altura del cilindro (fig. 17). Hagamos atravesar la hoja con una aguja en los puntos A y B, y luego desarrollémosla en un rectángulo plano. En ciertos lugares de la hoja habrán huellas de la perforación en el punto A; en la fig. 18 estas huellas están designadas con letras A'_1, A'_2, A'_3, ... Estas huellas se disponen

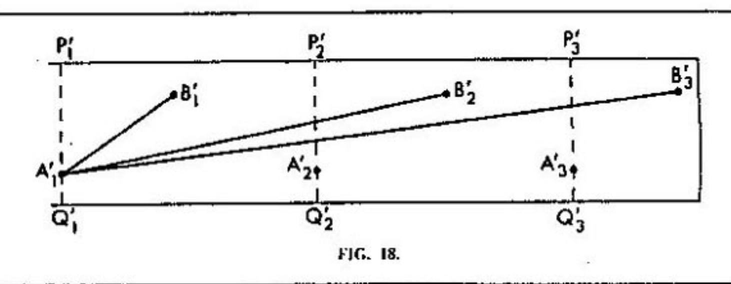


FIG. 18.

en una línea horizontal paralela a los lados horizontales de nuestro rectángulo. Si trazamos por los puntos A'_1, A'_2, A'_3 ... las rectas $P'_1Q'_1$ y $P'_2Q'_2$, $P'_3Q'_3$, ... paralelas al otro par de los lados del rectángulo, se separará el rectángulo $P'_1Q'_1Q'_2P'_2$ que se enrolla una vez alrededor del cilindro; al arrollarse la hoja en el cilindro, los segmentos $P'_1Q'_1$ y $P'_2Q'_2$ coincidirán con la generatriz PQ del cilindro, que pasa por el punto A; en este caso los puntos A'_1, A'_2 que se juntan caerán en el punto A del cilindro.

Las huellas de la perforación en el punto B del cilindro serán los puntos B'_1, B'_2, B'_3, ... de nuestra hoja. Su disposición es plenamente análoga a la disposición de los puntos A'_1, A'_2, A'_3, ...

Unamos el punto A'_1 con los puntos B'_1, B'_2, B'_3, ... por medio de unas rectas. Arrollemos de nuevo nuestra hoja en el cilindro de tal manera que los puntos A'_1, A'_2, A'_3, ... caigan en el punto A, y los puntos B'_1, B'_2, B'_3, ..., en el punto B del cilindro. El segmento rectilíneo $A'_1B'_1$ se transformará en el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la línea helicoidal (fig. 17) el cual ya hemos considerado anteriormente.

Para ser breves diremos: "la curva $\overset{\frown}{AB}$ da n vueltas *enteras* positivas (negativas) alrededor del eje del cilindro", siempre que,

desplazándose a lo largo de esta curva en la superficie del cilindro desde el punto A hasta el punto B, nosotros habremos realizado más que n y menos que $(n+1)$ vueltas enteras positivas (negativas) alrededor del eje del cilindro o exactamente n vueltas enteras.

Al enrollar el plano en el cilindro, el segmento $A'_1B'_2$ pasará también en el arco de la línea helicoidal $(\overset{\frown}{AB})_1$, que une los puntos A y B (fig. 19); del modo igual, los segmentos $A'_1B'_3$, $A'_1B'_4$, ... pasarán en los arcos de líneas helicoidales $(\overset{\frown}{AB})_2$ (fig. 20), $(\overset{\frown}{AB})_3$, ... que unen estos puntos. El arco $(\overset{\frown}{AB})_1$ da una vuelta entera positiva alrededor del eje del cilindro, los arcos $(\overset{\frown}{AB})_2$, $(\overset{\frown}{AB})_3$ dan dos, tres, ... tales vueltas enteras respectivamente.

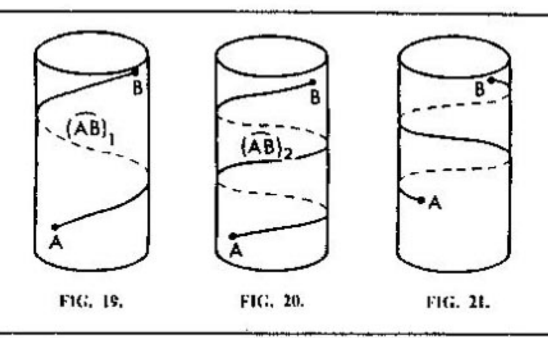


FIG. 19. FIG. 20. FIG. 21.

El arco $(\overset{\frown}{AB})_1$ es más corto de todos los arcos que unen los puntos A y B y dan una vuelta entera positiva alrededor del eje. Análogamente, $(\overset{\frown}{AB})_2$, $(\overset{\frown}{AB})_3$, etc. son los arcos más cortos que dan dos, tres, etc. tales vueltas enteras respectivamente.

Los arcos examinados eran arcos de las líneas helicoidales *derechas*. Del mismo modo se pueden obtener los arcos de líneas helicoidales *izquierdas* que unen los puntos A y B y dan una, dos, tres, ... vueltas enteras negativas alrededor del eje del cilindro (fig. 21). Cada uno de estos arcos es una línea más corta de las que unen los puntos A y B y que dan un número correspondiente de vueltas enteras negativas alrededor del eje del cilindro.

Aclaremos cómo se dispondrá en la superficie del cilindro un hilo de goma bien tendido y sujetado en los puntos A y B. Poniéndose tensa, este hilo se dispondrá a lo largo de una de las líneas más cortas, esto es, por una de las líneas helicoidales que unen los puntos A y B. Si, por ejemplo, enrollamos el hilo en el

cilindro de manera tal que, desplazándose por este hilo nos veremos obligados de realizar la vuelta positiva alrededor del eje (de derecha a la izquierda), entonces el hilo tomará la posición de una de las líneas helicoidales $\overset{\frown}{AB}$, $(\overset{\frown}{AB})_1$, $(\overset{\frown}{AB})_2$, ... A saber, el hilo tomará la posición $\overset{\frown}{AB}$, si no da ni una vuelta completa alrededor del eje del cilindro; la posición $(\overset{\frown}{AB})_1$, si da una vuelta entera; la posición $(\overset{\frown}{AB})_2$, si da dos vueltas enteras, etc.

En efecto, en un rectángulo plano el hilo, tendido entre el punto A'_1 y uno de los puntos B'_1, B'_2, B'_3, ..., se dispondrá a lo largo de uno de los segmentos $A'_1B'_1$, $A'_1B'_2$, $A'_1B'_3$, ... Si arrollamos esta hoja en la superficie del cilindro de una manera tal que el punto A'_1 coincida con el punto A, y los puntos B'_1, B'_2, B'_3 coincidan con el punto B, entonces el hilo tendido tomará la forma de uno de los arcos helicoidales $\overset{\frown}{AB}$, $(\overset{\frown}{AB})_1$, $(\overset{\frown}{AB})_2$, ..., respectivamente.

§ 3. LÍNEAS MÁS CORTAS EN UNA SUPERFICIE CÓNICA

1. LÍNEA MÁS CORTA EN UNA SUPERFICIE CÓNICA. Supóngase que el punto O es el origen de dos rayos infinitos OA y ON. Hagamos girar el rayo OA alrededor del rayo ON. La superficie engendrada por el giro del rayo OA se llama *superficie cónica* (*superficie de un cono*) (fig. 22), ON se denomina *eje* del cono. Los rayos que salen del punto O y están dispuestos en la superficie cónica se llaman *generatrices del cono* [1].

Si un plano, que pasa por las generatrices OA y OC, pasa también por el eje del cono, estas generatrices se llaman *opuestas*. Dos generatrices opuestas dividen el cono en dos *partes iguales* (*congruentes*). Cortemos la superficie cónica a lo largo de la generatriz OA, después de lo cual la superficie cónica puede desarrollarse en un plano. El vértice O del cono pasará en el punto O' del plano; las generatrices del cono se convertirán en los rayos en el plano que salen de O'. Toda la superficie cónica se transformará en cierto ángulo $A'_1O'A'_2$ del plano (fig. 23). La magnitud de este ángulo se denomina *ángulo desarrollado del cono*. Ella siempre será menos de 360°. Los lados del ángulo $O'A'_1$

[1] En la fig. 22 se expone sólo la *parte* de un cono infinito.

y $O'A'_2$ se han formado de la generatriz OA por la que se había cortado la superficie cónica. La generatriz OC, opuesta a la generatriz OA, pasará en la bisectriz $O'C'$ del ángulo $A'_1O'A'_2$. Efectivamente, ambas generatrices, OA y OC, dividen la superficie cónica, cortada por OA, en dos partes iguales S y T. Cuando esta superficie es desarrollada en un ángulo plano $A'_1O'A'_2$, cada una de las partes S y T del cono pasa en las mitades S' y T' de este ángulo y la generatriz OC, en la bisectriz $O'C'$ de él.

Hemos desarrollado la superficie cónica cortada en el plano. Efectuemos ahora la operación inversa y arrollemos el ángulo $A_1O'A'_2$ en el cono. En este caso, el punto O' pasará en el vértice del cono O, y los lados $O'A'_1$ y $O'A'_2$ del ángulo se convertirán en la misma generatriz.

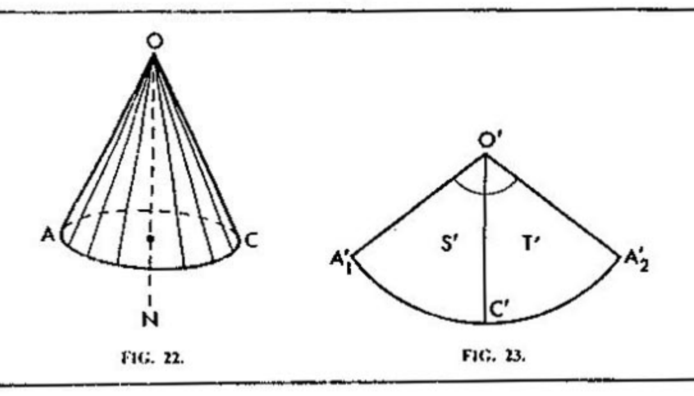


FIG. 22.   FIG. 23.

Cortemos ligeramente el plano por el lado $O'A'_1$ de nuestro ángulo. Vamos a enrollar el plano cortado en el cono. Hablando en general, el plano cubrirá el cono varias veces. Por ejemplo, si el ángulo desarrollado del cono es igual a 90°, el plano cubrirá la superficie cónica cuatro veces; a saber, si del punto O' trazamos los rayos $O'A'_2$, $O'A'_3$, $O'A'_4$ bajo los ángulos 90, 180 y 270° respecto a $O'A'_1$, entonces, al enrollarse la superficie cortada en el cono, cada uno de los ángulos $A'_1O'A'_2$, $A'_2O'A'_3$, $A'_3O'A'_4$, $A'_4O'A'_1$ cubrirá por completo la superficie del cono. En total tendremos el cubrimiento cuádruple del cono por el plano cortado. Los rayos $O'A'_1$, $O'A'_2$, $O'A'_3$, $O'A'_4$ del plano se convertirán en una misma generatriz del cono.

Si, en cambio, el ángulo desarrollado es igual, por ejemplo, a 100°, el plano cortado cubrirá la superficie cónica tres veces

completas y, además, una parte del cono será cubierta cuatro veces (el plano consta de tres ángulos adyacentes de 100° con el vértice en O', cada uno de los cuales cubrirá una vez toda la superficie cónica, y del ángulo de 60°, el cual cubrirá adicionalmente una parte de esta superficie).

2. LÍNEAS GEODESICAS EN UNA SUPERFICIE CÓNICA. Examinemos en un plano una recta arbitraria l'. Supongamos que la recta l' pasa por el punto O'. Se compone, por consiguiente, de dos rayos $O'D$ y $O'E'$ (fig. 24). Al enrollar el plano en el cono (cuando el punto O caiga en el vértice O del cono) cada uno de los rayos, $O'D'$ y $O'E'$, pasa a ser una generatriz del cono. Nuestra recta pasa en dos generatrices. [1]

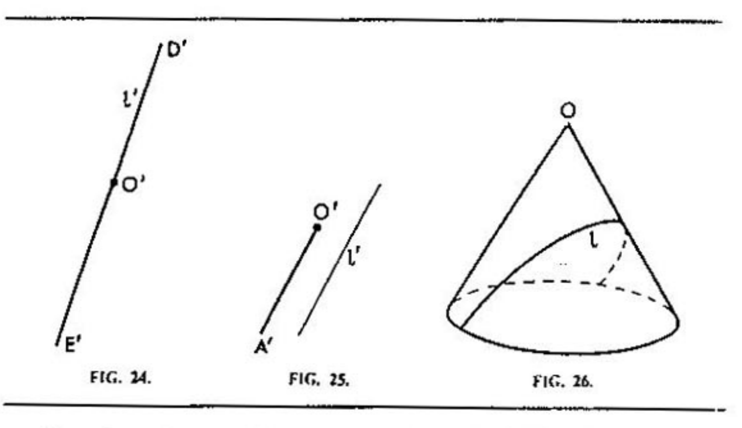


FIG. 24. FIG. 25. FIG. 26.

Que ahora la recta l' no pase por el punto O' (fig. 25). Cortemos el plano a lo largo del rayo $O'A'$, paralelo a l', y enrollemos el plano cortado en la superficie cónica. En este caso la recta l' pasará a una cierta curva l en la superficie cónica (fig. 26). Esta curva l se denomina *línea geodésica* en la superficie del cono. Todo segmento de la recta l' pasará en un arco de la curva l. Y, viceversa, todo arco de la curva l pasará en un segmento de la recta l', al desarrollarse la superficie cónica en el plano.

[1] Dos generatrices pueden juntarse a una. Esto ocurre si el valor numérico del ángulo desarrollado del cono, expresado en grados, es el divisor del número 180, es decir, cuando este ángulo sea igual a 180°, 90°, 60°, ..., en general, a $\frac{180°}{k}$, donde k es un número entero.

Las curvas obtenidas en la superficie cónica desempeñan un papel análogo a las líneas helicoidales en la superficie de un cilindro.

Unamos los puntos *A* y *B* de la superficie cónica con toda una serie de líneas dispuestas en la superficie y que una de ellas, digamos el arco $\overset{\frown}{AB}$, tenga la longitud mínima. Al desarrollarse la superficie cónica en un plano, el arco $\overset{\frown}{AB}$ pasará en el arco plano *A'B'*; puesto que el arco $\overset{\frown}{AB}$ es una línea más corta entre aquellas que se disponen en la superficie cónica y unen *A* y *B*, entonces *A'B'* es la línea más corta entre las líneas en el plano que unen *A'* y *B'*. Por lo tanto, *A'B'* es un segmento rectilíneo.

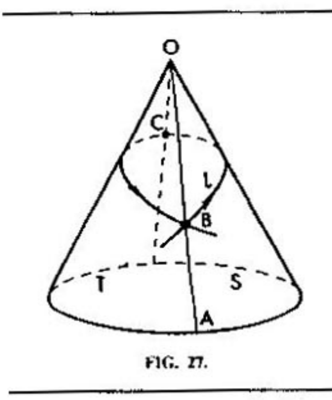


FIG. 27.

El arco $\overset{\frown}{AB}$, que en el desarrollo de la superficie cónica en el plano, pasa en un segmento rectilíneo es el arco de la línea geodésica.

Ahora veremos que la forma de la línea geodésica depende considerablemente del ángulo desarrollado del cono.

3. PUNTOS DOBLES DE LAS LÍNEAS GEODÉSICAS. Introduzcamos previamente la siguiente definición. Supongamos que desplazándonos a lo largo de cierta línea *q*, pasaremos dos veces por el mismo punto *A*. El punto *A* se denomina *punto doble* de la línea *q* [1]. En la fig. 27 el punto *B* representa el punto doble de la línea *l*: desplazándonos a lo largo de la línea *l* según las direcciones indicadas con flechas, pasaremos dos veces por este punto.

[1] A veces puntos dobles se llaman *nudos*.

TEOREMA 1. *Si el ángulo desarrollado de un cono es mayor o igual a 180°, las líneas geodésicas en el cono están privadas de puntos dobles. Si el ángulo desarrollado del cono es menor que 180°, toda línea geodésica tiene al menos un punto doble.*

Examinemos en el plano el punto O' y la recta l', que no pasa por O' (fig. 28). Enrollado el plano en el cono de modo tal que O' coincida con el vértice del cono O, la recta l' se transformará en la línea geodésica l.

Sea C' la base de una perpendicular trazada de O' en l'. En el enrollamiento del plano en el cono el rayo $O'C'$ pasará en la generatriz OC del cono. El punto C se llama, a veces, *vértice* de la línea geodésica en la superficie cónica. Designemos con OA la generatriz opuesta del cono; OA y OC dividen la superficie del cono en dos partes iguales, S y T. Cortemos la

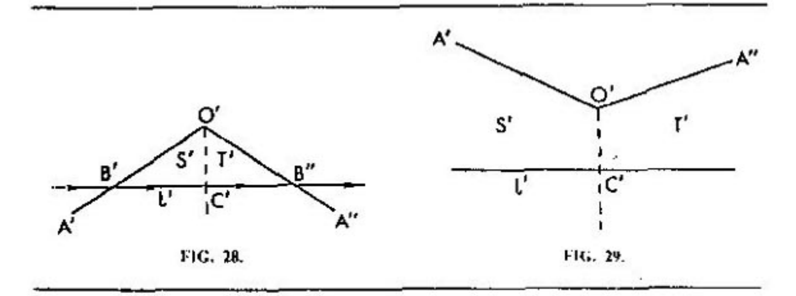


FIG. 28. FIG. 29.

superficie cónica a lo largo de la generatriz OA y desarrollémosla en el plano de tal manera que el vértice O del cono pase, de nuevo, en el punto O', y la generatriz OC, en el rayo $O'C'$. En este procedimiento la línea geodésica l se desarrollará otra vez en la recta l'. Toda la superficie cónica pasará en el ángulo $A'O'A''$. Ambas sus mitades, S y T, pasarán en las mitades S' y T' de dicho ángulo; la recta $O'C'$ es la bisectriz de este ángulo.

Examinemos dos casos.

1) El ángulo $A'O'A''$ (ángulo desarrollado del cono) es mayor o igual a 180° (fig. 29). La recta l' se dispone enteramente dentro de este ángulo. Si arrollamos el ángulo en la superficie cónica de tal modo que ambos lados del ángulo, $O'A'$ y $O'A''$, coincidan con la generatriz OA, la recta l' pasará de nuevo en la línea geodésica l en la superficie del cono; los puntos diferentes de la recta l' pasarán en puntos diferentes del cono; por consiguiente, en este caso l no tiene puntos dobles.

2) El ángulo $A'O'A''$ es menor que 180°. La recta l', perpendicular a la bisectriz $O'C'$, corta los lados del ángulo en los puntos que designaremos con B' y B'' (fig. 28).

El triángulo $B'O'B''$ es isósceles, puesto que su altura $O'C'$ coincide con la bisectriz. Enrollemos el ángulo $A'O'A''$ en la superficie del cono de tal manera que O' pase en el vértice del cono y ambos lados $O'A'$, $O'A''$ del ángulo, en la generatriz OA. Los puntos B' y B'' darán al punto B de esta generatriz, por ser iguales los segmentos $O'B'$ y $O'B''$ (fig. 27). La recta l' pasará en la línea geodésica l; el segmento $B'C'$ de la recta l', dispuesta en la mitad S' del ángulo $B'O'B''$, pasará en el arco $\overset{\frown}{BC}$ de la línea l que une los puntos B y C y se ubica en la mitad S de la superficie cónica. Por analogía, el segmento $B''C'$, dispuesto en la mitad T' del ángulo $B'O'B''$, pasará en el arco $\underset{\smile}{BC}$ de la línea l, que une los puntos B y C y se dispone en la mitad T de la superficie cónica. El punto B es un punto doble de la curva l. El segmento $B'B''$ de la recta l' pasará en el arco BCB que tiene la forma de un lazo con extremos coincidentes.

Aclaremos cuántos puntos dobles tiene la línea geodésica. La respuesta a esta pregunta la da el siguiente teorema que precisa el teorema anterior.

TEOREMA 2. *Supongamos que el ángulo desarrollado del cono equivale a* α *(*α *es la medida del ángulo en grados), en este caso*

1) *Si 180° no se dividen por* α*, el número de puntos dobles de la línea geodésica es igual a la parte entera de la fracción* $\frac{180}{\alpha}$.

2) *Si* 180° *se dividen por* α*, el número de puntos dobles es igual a* $\frac{180}{\alpha} - 1$.

Si $\alpha > 180$, la parte entera de la fracción $\frac{180}{\alpha}$ es nula; cuando $\alpha = 180$, se tiene $\frac{180}{\alpha} - 1 = 0$. Por consiguiente, según nuestro teorema, en estos casos el número de puntos dobles debe ser nulo; esto es una paráfrasis de la primera parte del teorema anterior.

Nos queda considerar el caso en que $\alpha < 180$. Conservemos las designaciones del teorema antecedente. El ángulo $A'O'A''$ (fig. 30) es el ángulo desarrollado del cono. Por el punto O' tracemos una

perpendicular $O'C'$ a la recta l' y la recta KL que es paralela a l'. KL divide el plano en dos semiplanos. Vamos a examinar sólo el semiplano en que se ubica la recta l'. Tracemos del punto O' en este semiplano unos rayos que forman con el rayo $O'C'$ los ángulos múltiplos a $\frac{\alpha}{2}$. Serán los rayos $O'B'$, $O'B''$, $O'B'_1$, $O'B''_1$, ..., que cortan la recta l' en los puntos B', B'', B'_1, B''_1, ... Observemos que $O'B' = O'B''$, $O'B'_1 = O'B''_1$, ... Vamos a enrollar nuestro semiplano en el cono de tal modo, que el punto O' de al vértice del cono O, y el rayo $O'C'$ vaya a lo largo de la

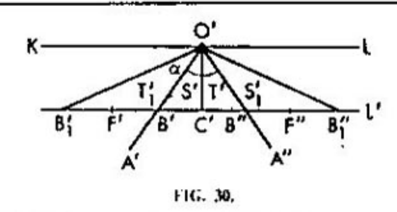


FIG. 30.

generatriz OC (fig. 31). Los ángulos de nuestro semiplano, iguales a $\frac{\alpha}{2}$ y contenidos entre los rayos vecinos $O'B'_1$, $O'B'$, $O'C'$, $O'B''$, $O'B''_1$, ..., cubrirán, en esta operación, varias veces ambas mitades S y T de la superficie cónica. A saber, el ángulo S' caerá en la mitad S del cono; los ángulos contiguos T'_1 y T' caerán en otra mitad T del cono, etc. Puesto que el rayo $O'C'$ irá por la generatriz OC, los rayos $O'B'$, $O'B''$ irán a lo largo de la generatriz opuesta OA; los rayos $O'B'_1$, $O'B''_1$ irán de nuevo por OC, etc.

Dado que los segmentos $O'B' = O'B''$, $O'B'_1 = O'B''_1$, los pares de puntos B' y B'', B'_1 y B''_1, ..., al caer en una generatriz, coincidirán dos a dos: el punto B' coincidirá con B'' y dará al punto B de la generatriz OA; B'_1 y B''_1 darán al punto B_1 de la generatriz OC, etc. Por consiguiente, los puntos B, B_1, ... son puntos dobles de l en la que pasó la recta l', cuando el semiplano se enrollaba en el cono. El número de estos puntos es igual al número de los rayos $O'B'$, $O'B'_1$, ... dentro del ángulo recto $KO'C'$. Como que estos rayos forman con $O'C'$ los ángulos, múltiplos a $\frac{\alpha}{2}$ e inferiores a 90°, su número equivale al número de los números múltiplos a $\frac{\alpha}{2}$ e inferiores a 90 (es decir, múltiplos

a α e inferiores a 180). En otras palabras, si 180 no se divide por α, el número de estos rayos es igual a la parte entera de la fracción $\frac{180}{\alpha}$. Si, en cambio, 180 se divide por α, su número es igual a $\frac{180}{\alpha} - 1$.

Para la demostración completa del teorema nos resta senalar que todos los puntos dobles de una linea geodésica son aquellos que se obtienen como resultado de juntarse los puntos B'_1, B''_1 de la recta l'.

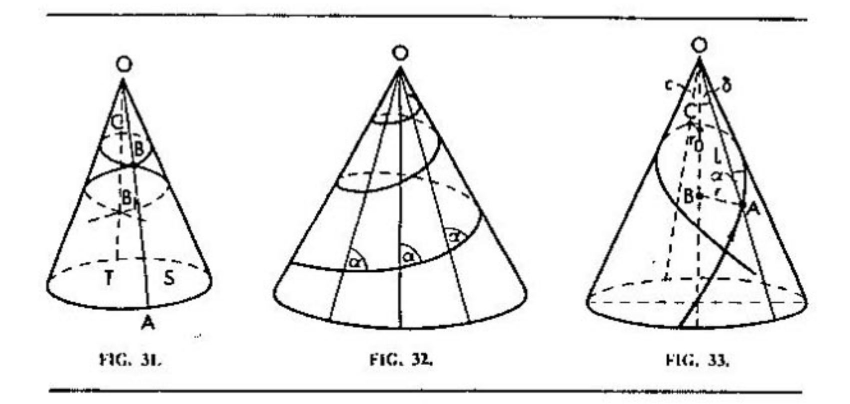


FIG. 31. FIG. 32. FIG. 33.

En efecto, un punto doble de la línea geodésica se obtiene, cuando dos puntos de nuestra recta l' pasan (durante el desarrollo del semiplano en el cono) en el mismo punto del cono. Para esto es necesario que ambos puntos sean igualmente distanciados de O' y se dispongan en l'. Quiere decir, estos dos puntos deben disponerse en l' simétricamente respecto a C'. Supongamos que uno de ellos, que sea F' (véase la fig. 30) se disponga a la izquierda de C' y el otro, F'', a la derecha. Si el punto F' no coincide ni con uno de los puntos B', B'', B'_1, B''_1, ..., entonces se debe ubicar dentro de uno de los ángulos $C'O'B'$, $C'O'B''$, $B'O'B'_1$, $B''O'B''_1$, ..., marcados en la fig. 30 con las letras S'_1 y T'_1, respectivamente. Si el punto F' está dentro del ángulo S'_1, entonces F'', que es el punto simétrico a F', se ubica dentro del ángulo T'_1, es decir, al enrollarse el semiplano en el cono, el punto F' pasará en el punto dispuesto dentro del semicono S, mientras que F'', en el punto dispuesto dentro del semicono T;

viceversa, si el punto F' pasa en el punto dispuesto dentro del semicono T, el punto F'' pasará en el punto dispuesto dentro del semicono S. En ambos casos F' y F'' pasarán en los puntos diferentes del cono. Por lo tanto, además de los puntos obtenidos como resultado de la unión de los pares B' y B'', B'_1 y B''_1, la linea geodésica l no lleva ningunos otros puntos dobles. El teorema queda demostrado.

Atraigamos la atención a una banda ubicada entre las rectas paralelas KL y l'. Nuestra sujestión es que el mismo lector examine de qué modo se enrollará esta banda en la superficie cónica para diferentes valores del ángulo desarrollado α del cono (para $\alpha > 180°$; $\alpha = 180°$; $180° > \alpha > 90°$; $\alpha = 90°$; $90° > \alpha > 60°$, etc.).

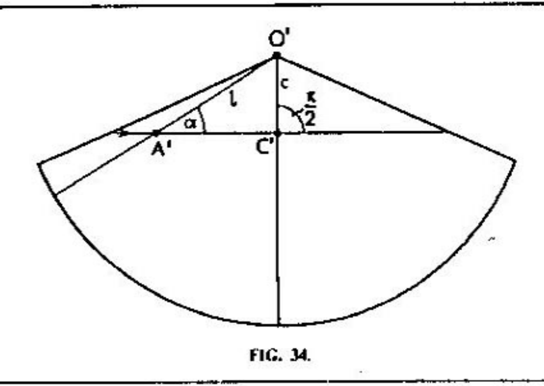


FIG. 34.

Reiterando los razonamientos del final del párrafo antecedente, nos convenimos en que un hilo elástico tensado se dispone en la superficie del cono a lo largo de una línea geodésica.

OBSERVACIÓN. En la superficie cónica pueden también destinguirse las *lineas helicoidales*, es decir, las lineas que cortan todas las generatrices del cono bajo ángulos iguales α (fig. 32). Cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = 90°$, las lineas helicoidales en el cono degeneran respectivamente en las generatrices y secciones circulares. Para $\alpha \neq 0$, las lineas helicoidales en el cono no constituyen lineas geodésicas. En esto consiste su diferencia de las lineas helicoidales en la superficie de un cilindro.

4. TEOREMA DE CLAIRAUT PARA EL CASO DE LÍNEAS GEODÉSICAS EN UN CONO. Sea C el vértice de una línea geodésica s en la superficie del cono cuya distancia del vértice del cono es igual al segmento

$OC = c$ y del eje del cono, r_0 (fig. 33). En este caso la línea geodésica en el punto C es perpendicular a la generatriz OC. Luego, sean A un punto *arbitrario* de la línea geodésica, r la distancia entre el punto A y el eje del cono, α ángulo formado por la línea geodésica s y la generatriz OA, l la longitud del segmento OA. Se realiza la siguiente correlación:

$$l \operatorname{sen} \alpha = c. \qquad (1)$$

Para demostrar la fórmula (1) desarrollemos en un plano la superficie del cono (fig. 34). En este caso OC y OA pasarán en $O'C'$ y $O'A'$ (las longitudes c y l quedan las mismas), el arco $\overset{\frown}{AC}$ de la línea geodésica s pasará en el segmento $A'C'$ de la recta, con la particularidad de que $O'C'$ será perpendicular a la recta $A'C'$; el ángulo del vértice A' en el triángulo $A'O'C'$ es igual a α. Del triángulo $A'O'C'$ obtenemos:

$$l \operatorname{sen} \alpha = c,$$

lo que se trataba de demostrar.

Observemos que si δ es el ángulo formado por una generatriz del cono y el eje de éste (véase la fig. 33), entonces $r = l \operatorname{sen} \delta$. Multiplicando ambos miembros de la igualdad (1) por $\operatorname{sen} \delta$, obtendremos:

$$l \operatorname{sen} \delta \cdot \operatorname{sen} \alpha = c \operatorname{sen} \delta$$

ó

$$r \operatorname{sen} \alpha = c_1 \qquad (2)$$

donde $c_1 = c \operatorname{sen} \delta$ es una constante para la línea geodésica.

La última igualdad demuestra el siguiente teorema 3.

TEOREMA 3. *Para todos los puntos A de la línea geodésica s en la superficie cónica la expresión $r \operatorname{sen} \alpha$, en la que r es la distancia entre A y el eje del cono y α es el ángulo formado por la generatriz OA y la línea geodésica s, es una magnitud constante:*

$$r \operatorname{sen} \alpha = \text{const}. \qquad (3)$$

Este teorema es un caso particular del teorema del Clairaut (véase el § 10).

Un cilindro puede considerarse como caso límite del cono (cuando el vértice del cono se aleja a la infinidad). A una línea geodésica en el cono responde una línea helicoidal en el cilindro. La fórmula (3), obviamente, queda válida también para el cilindro: la distancia r de todos los puntos del cilindro hasta el eje es igual; el ángulo α entre la línea helicoidal y las generatrices del

cilindro es también el mismo para todos los puntos de la línea helicoidal.

§ 4. LÍNEAS MÁS CORTAS EN LA SUPERFICIE DE UNA BOLA

1. LONGITUD DE LA LÍNEA. Al investigar las líneas más cortas en la superficie de un cilindro y de un cono hemos aprovechado la circunstancia de que las superficies cilíndricas y cónicas podían desarrollarse en una parte del plano. Mas, este procedimiento no vale en el estudio de las líneas más cortas en la superficie de la bola que no puede ser desarrollada en una parte del plano.

Recordemos ahora cómo en la geometría elemental se deduce la propiedad del segmento de una recta de proveer la mínima longitud entre todas las líneas que tienen los mismos extremos. Esta propiedad proviene del teorema de que un lado de un triángulo es menor que la suma de otros dos lados. A saber, a base de este teorema se demuestra que el segmento AB de una recta es más corto que toda quebrada $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ con los mismos extremos $A_0 = A$ y $A_n = B$ (fig. 35). En efecto, podemos sólo acortar la quebrada, si sustituimos sus dos eslabones contiguos A_0A_1 y A_1A_2 por el segmento A_0A_2 (puesto que el lado A_0A_2 del triángulo $A_0A_1A_2$ es más corto que la suma de los lados A_0A_1 y A_1A_2)[1]. Con ello reemplazamos la quebrada $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ con otra quebrada $A_0A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ que tiene un lado menos. Por analogía, en esta quebrada se pueden sustituir dos eslabones contiguos A_0A_2 y A_2A_3 por un lado A_0A_3, de lo cual la longitud de la quebrada no aumentará. Llegaremos a la quebrada $A_0A_3 \ldots A_{n-1}A_n$, cuyo número de eslabones está disminuido por un eslabon más. De esta manera podemos disminuir sucesivamente el número de eslabones de la quebrada hasta que reduzcámosla al único eslabón, es decir, al segmento $A_0A_n = AB$. Está claro que con cada paso de una quebrada a la otra, su longitud sólo podía disminuir (a veces esta longitud quedaba inalterable; ella no podía quedarse invariable en cada paso, pues esto sólo es posible en el caso en que todos los puntos $A_0, A_1, \ldots, A_n$ se ubican en la misma recta AB, lo que en nuestro caso está excluido).

[1] Si los puntos A_0, A_1, A_2 se disponen en una misma recta, la suma de longitudes de dos eslabones A_0A_1 y A_1A_2 es igual a la longitud del eslabón A_0A_2. Así, sustituyendo dos eslabones, A_0A_1 y A_1A_2, por un eslabón A_0A_2, no aumentamos la longitud de la quebrada. Esta observación está relacionada también con las consideraciones a seguir.

Precisamente de aquí se infiere que la quebrada de partida era más larga que el segmento AB. En la geometría elemental sólo se demuestra que el segmento AB de una recta es más corto en comparación con toda quebrada que une los mismos puntos A y B.

Con el fin de deducir la afirmación análoga para una línea arbitraria que une los puntos A y B, es necesario, ante todo, determinar exactamente la longitud de la curva. En el curso de la geometría elemental la longitud de la circunferencia se determina como límite de longitudes de los polígonos inscritos, cuando el número de lados del polígono tiende a infinito, y la longitud del lado mayor tiende a cero.

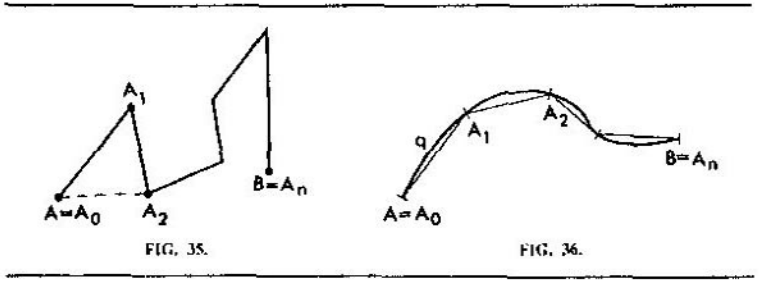


FIG. 35. FIG. 36.

De manera análoga puede determinarse también la longitud de una línea arbitraria. Sea dada una línea q que une los puntos A y B (fig. 36). Vamos a desplazarnos a lo largo de esta línea, del punto A al punto B, y destaquemos sucesivamente $(n+1)$ puntos: $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., $A_n = B$. Unamos estos puntos de modo sucesivo por segmentos. Obtendremos una quebrada $A_0A_1A_2 \ldots A_n$, la que llamaremos la *quebrada inscrita en nuestra curva*. Construiremos ahora las quebradas, inscritas en la curva q, *cuyo número de lados crece ilimitadamente*. Construiremos estas quebradas de modo tal que con el crecimiento ilimitado del número de los lados la *longitud del lado mayor tienda a cero*. Se puede mostrar que las *longitudes de los polígonos inscritos tienden, en estas condiciones, a un límite que se toma por la longitud de la línea*.

Ya que el segmento AB es más corto que la longitud de cualquier quebrada que une los puntos A y B, y las longitudes de las curvas que unen dichos puntos son límites de las longitudes de quebradas, que los ligan, de aquí se deduce que un segmento de una recta es la línea más corta también entre todas las líneas que unen A y B.

2. LÍNEAS MÁS CORTAS EN LA SUPERFICIE DE UNA BOLA. Pasemos ahora a la búsqueda de las líneas más cortas en la superficie de una bola. Observemos que por dos puntos A y B en la superficie de una bola, siempre que no están úbicados en dos extremos opuestos de un mismo diámetro, se puede trazar un único círculo mayor de la bola. Por dos puntos dispuestos en los extremos de un mismo diámetro se puede trazar una infinidad de círculos mayores. Excluiremos, por ahora, el último caso sin especificaciones especiales: hablando de dos puntos en la superficie esférica, supondremos, silenciosamente, que estos dos puntos no se ubican en el mismo diámetro de la bola.

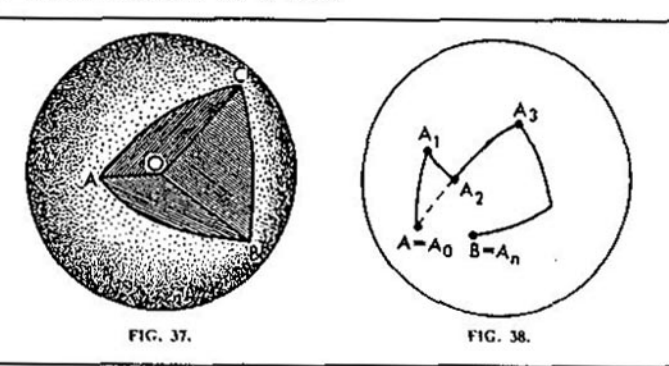


FIG. 37. FIG. 38.

Tracemos el círculo mayor que pasa por los dos puntos dados A y B de la superficie esférica. Los puntos A y B dividen el círculo mayor en dos arcos desiguales (dado que no se disponen en los extremos de un mismo diámetro). Designaremos con $\overset{\frown}{AB}$ la *menor* de estos arcos.

Sean dados tres puntos de la superficie esférica: A, B, C, unidos con los arcos de los círculos mayores $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$. Estos tres arcos forman el así llamado *triángulo esférico* ABC; los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ se denominan *lados* de éste.

Resulta que para los triángulos esféricos es válido el teorema, análogo al teorema principal sobre las longitudes de los lados de un triángulo ordinario (plano).

TEOREMA. *Todo lado de un triángulo esférico es menor que la suma de dos otros lados.*

Examinemos un triángulo esférico ABC en la superficie de una bola con centro en el punto O (fig. 37). El lado $\overset{\frown}{AB}$ de este

triángulo es un arco del círculo mayor, es decir, del círculo cuyo centro está en O; en el plano de este círculo al arco $\overset{\frown}{AB}$ le responde el ángulo central AOB. Análogamente, en los planos en que se disponen los lados $\overset{\frown}{BC}$ y $\overset{\frown}{CA}$, les responden los ángulos centrales BOC y COA. Las longitudes de los lados $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, representando los arcos de los círculos mayores de iguales radios, son proporcionales a los ángulos centrales AOB, BOC, COA.

Tres planos de nuestros círculos mayores forman un ángulo triedro con vértice en el punto O y los ángulos planos AOB, BOC, COA. Las longitudes de los lados de nuestro triángulo esférico son proporcionales a los correspondientes ángulos planos del ángulo triedro. Como en un ángulo triedro cada ángulo plano es menor que la suma de otros dos ángulos planos, la desigualdad análoga se efectúa también para los lados del triángulo esférico, proporcionales a aquéllos. Esto demuestra nuestro teorema.

Sea dada una sucesión de los puntos A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n ligados en la esfera por los arcos de círculos mayores A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. El conjunto de estos arcos recibe el nombre de la *quebrada esférica* que une los puntos A_0 y A_n (fig. 38).

En el caso de un plano, del hecho de que un lado del triángulo es menor que la suma de otros dos lados provenía el teorema de que el segmento AB de una recta es más corto que la quebrada que liga los mismos puntos A y B. En el caso de una superficie esférica, análogamente, del hecho de que un lado del triángulo esférico es menor que la suma de otros dos lados se deduce que el arco $\overset{\frown}{AB}$ del círculo mayor es menor que toda quebrada que une los mismos puntos. Luego, para una superficie esférica, igual que para un plano, las longitudes de las curvas que unen los puntos A y B se obtienen como límites de las longitudes de las quebradas esféricas que unen estos puntos. Ya que el arco $\overset{\frown}{AB}$ del círculo mayor es más corto que todas las quebradas esféricas, que unen A y B, entonces él es más corto que cualesquiera curvas que unen estos puntos.

La demostración de que el arco $\overset{\frown}{AB}$ es más corto que una quebrada cualquiera, que une los puntos A y B, repite, en lo esencial, la demostración del teorema análogo para una quebrada dispuesta en un plano. Sea dado el arco $\overset{\frown}{AB}$ y la quebrada $A_0A_1A_2A_3 \ldots A_n$, donde $A_0 = A$, $A_n = B$.

En el triángulo esférico $A_0A_1A_2$ el lado $\overset{\frown}{A_0A_2}$ es menor que la suma de los lados $\overset{\frown}{A_0A_1}$ y $\overset{\frown}{A_1A_2}$ [1]. Sustituyamos dos eslabones, $\overset{\frown}{A_0A_1}$ y $\overset{\frown}{A_1A_2}$ por el arco $\overset{\frown}{A_0A_2}$. Obtendremos una línea nueva $A_0A_2A_3 \ldots A_n$, quizás más corta que la línea original, y que tiene un eslabón menos. Luego sustituyamos dos lados, $\overset{\frown}{A_0A_2}$ y $\overset{\frown}{A_2A_3}$ por un lado $\overset{\frown}{A_0A_3}$; como resultado, la longitud de la quebrada sólo puede disminuir o quedar invariable. Las transformaciones análogas (la sustitución de dos eslabones vecinos de la quebrada por un eslabón) continuaremos más adelante. Con cada disminución del número de lados la longitud de la quebrada sólo puede disminuir o quedar sin cambios. En este caso seguiremos obteniendo las nuevas quebradas que unen A y B cada vez por un número menor de lados y, por fin, llegaremos a una quebrada de un solo eslabón, es decir, al mismo arco $\overset{\frown}{AB}$. En este procedimiento la longitud de la quebrada cada vez o bien disminuía o bien, a veces, quedaba inalterable. Mas, la longitud de la quebrada no puede quedar invariable con cada paso, ya que ello significaría que los puntos $A_0, A_1, \ldots, A_n$ pertenecen todos al círculo mayor en el arco $\overset{\frown}{AB}$, lo que en nuestro caso está excluido. Por esta razón, la *longitud de la línea original* $A_0A_1 \ldots A_n$ *es mayor que la longitud* $\overset{\frown}{AB}$.

Examinemos ahora el caso en que los puntos A y B se disponen en los extremos del mismo diámetro de una bola. En este caso existe una infinidad de arcos de los círculos mayores que unen A y B y que tienen AB en calidad de diámetro. Todos ellos tienen la misma longitud. Por otra parte, toda otra curva q, que une los mismos puntos A y B, tiene la longitud mayor que la de la semicircunferencia del círculo mayor. Efectivamente, supongamos que el punto C (distinto de A y B) se ubica en q y divide esta línea en dos líneas (AC) y (CB). Tracemos la semicircunferen-

---

[1] Si los puntos A_0, A_1 y A_2 se disponen en un círculo mayor, entonces el lado $\overset{\frown}{A_0A_2}$ o bien es igual a la suma de los lados $\overset{\frown}{A_0A_1}$ y $\overset{\frown}{A_1A_2}$ (si esta suma es menor que la semicircunferencia), o bien es menor que ella (si la suma es mayor que la semicircunferencia). Así, al sustituir dos lados $\overset{\frown}{A_0A_1}$ y $\overset{\frown}{A_1A_2}$ por un lado $\overset{\frown}{A_0A_2}$, siempre será que la longitud de la quebrada sólo puede disminuir o quedar sin alteración. Esta observación tiene relación a las consideraciones ulteriores.

cia del círculo mayor $\widehat{ACB}$; ésta consiste de dos arcos $\widehat{AC}$ y $\widehat{CB}$. Cada uno de estos arcos es más corta que cualquier otra curva en la superficie de la bola que une los mismos puntos A y B. Ya que nuestra curva q no es una semicircunferencia, al menos una de sus partes, (AC) o (CB), no coincide con el arco correspondiente $\widehat{AC}$ o $\widehat{CB}$. Sea, por ejemplo, (AC) que no coincide con $\widehat{AC}$. En este caso, la longitud de (AC) es mayor que la longitud de $\widehat{AC}$. Luego, la longitud de (CB) o bien mayor que la longitud

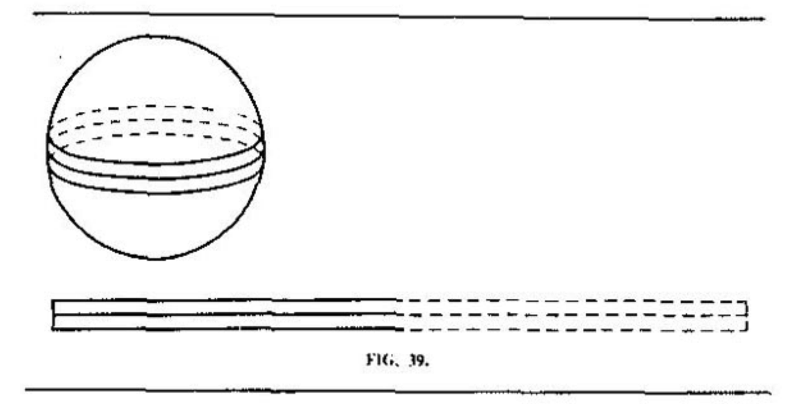


FIG. 39.

de $\widehat{CB}$ (si ellos no coinciden) o bien es igual (si (CB) coincide con $\widehat{CB}$). De aquí se deduce que la longitud total de q es mayor que la longitud de $\widehat{ACB}$.

Para dos puntos diamétricamente opuestos, A y B, existe una infinidad de las curvas más cortas que unen estos puntos; precisamente estas curvas representan todas las semicircunferencias de los círculos mayores que unen A y B.

3. OBSERVACIÓN ADICIONAL. La superficie de una bola no puede desarrollarse en una parte del plano sin ser deformada, es decir, sin alterar las longitudes de las líneas dispuestas en ella. Sin embargo, una banda muy estrecha, dispuesta en la superficie de la bola a lo largo de cierta línea q, puede ser desarrollada en el plano, admitiendo sólo alteraciones ínfimas en las longitudes de las líneas dispuestas en la banda. Además, cuanto más estrecha es la banda seleccionada en la bola, tanto menores son estas alteraciones, esto es, tanto mayor es la exactitud con que esta banda puede desarrollarse en el plano. Hablando en el lenguaje de la

teoría de límites, la alteración en la longitud de las líneas en la banda es un infinitésimo de orden superior en comparación con el ancho de la banda.

Si una banda estrecha, dispuesta en la superficie de una bola, está desarrollada en el plano, el arco del círculo mayor, contenido en esta banda pasa en el segmento rectilíneo (y viceversa).

En efecto, el arco $\overset{\frown}{AB}$ del círculo mayor en la banda de bola es el más corto entre otros arcos que se ubican en la banda y unen A y B. Si, al desarrollar la banda en el plano, los puntos A y B pasan en A' y B', entonces el arco $\overset{\frown}{AB}$ pasará en el arco que une en el plano A' y B', y éste será el arco más corto en comparación con los arcos planos

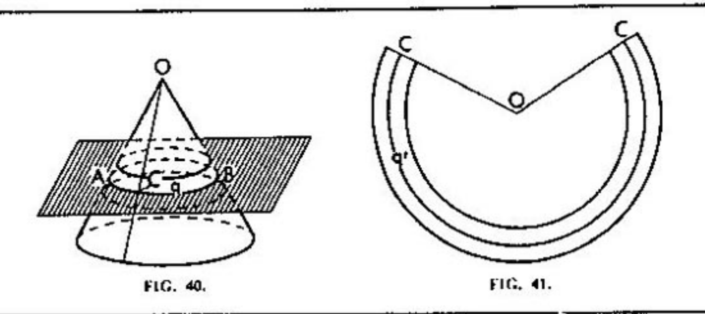


FIG. 40. FIG. 41.

vecinos que unen los mismos puntos; por lo tanto, $\overset{\frown}{AB}$ pasará en el segmento $A'B'$.

COLORARIO. Recortemos en la superficie esférica una banda estrecha alrededor del círculo mayor y, después de cortarla, desarrollémosla en el plano. La banda se transformará en una banda plana recta; en la línea central de la última pasará el círculo mayor. Viceversa, si arrollamos la banda estrecha plana y recta (cinta) en la superficie de la bola, ella caerá en esta superficie por el círculo mayor (fig. 39).

Veamos ahora en qué se convertirá la banda estrecha, que contiene un arco del círculo menor q (es decir, de una circunferencia en la superficie de la bola, distinta del círculo mayor).

Notemos previamente la siguiente circunstancia. Partiremos una superficie cónica con un plano perpendicular al eje del cono. Este plano cortará la superficie cónica por la circunferencia q. Los segmentos de las generatrices entre el vértice O del cono y la circunferencia q son iguales (por ejemplo, en la fig. 40 $OA = OB = OC$). Si cortamos la superficie cónica a lo largo de la generatriz OC y desarrollamos esta superficie en el plano, la circunferencia q pasará en el arco de la circunferencia q' cuyo radio es igual a OC. La banda estrecha en la superficie del cono, que tiene por su línea central la circunferencia q, se desarrollará en el plano en una banda cuya línea central será q' (fig. 41).

Volvamos a la superficie esférica (fig. 42). Tracemos el diámetro AB por el centro O_1 del círculo menor p_1 y por el centro O de la bola; tracemos el círculo mayor p de diámetro AB, que se interseca con el círculo menor p_1 en el punto C. Sean r radio de p_1, R radio de la bola, α ángulo O_1CO. Tenemos en este caso

$$\cos\alpha = \frac{r}{R}.$$

Tracemos la tangente CD a p en el punto C hasta que se corte en el punto D con la prolongación del diámetro AB. Se tiene: $\angle CDO =$

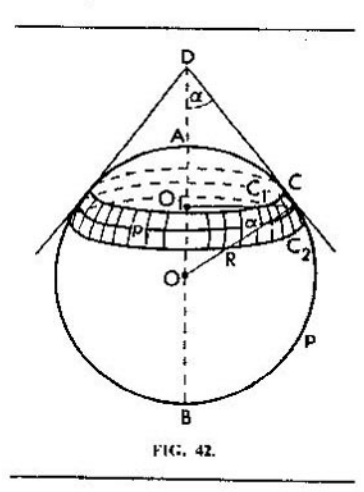


FIG. 42.

$= \angle O_1CO = \alpha$ (a consecuencia de la perpendicularidad de los lados de estos ángulos). Del triángulo OCD tenemos:

$$CD = R\,\mathrm{ctg}\,\alpha = R\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = R\left[\frac{r}{R} : \sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right] = \frac{rR}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

Hagamos girar el dibujo alrededor del eje AB. La recta CD forma una superficie cónica; la circunferencia p describirá una bola de radio R. Estas superficies cónica y esférica se tocan por la circunferencia p_1.

El arco pequeño C_1C_2 del círculo p, que contiene el punto C, se lo puede considerar coincidente con un segmento pequeño de la tangente[1]. Durante el giro de este arco alrededor de AB él describirá una banda esférica que contiene el círculo menor p_1. Esta banda se la puede considerar coincidente con la banda en el cono[2], que se toca con nuestra

[1] Coincidente, si despreciamos de infinitésimos de los órdenes superiores en comparación con la longitud C_1C_2.

[2] Coincidente en el mismo sentido.

bola a lo largo de la circunferencia p_1 (esta banda en la superficie cónica está formada por el giro del segmento de la tangente con el cual, según nuestros razonamientos, coincide el arco C_1C_2). Si cortamos esta banda por C_1C_2 y la desarrollamos en el plano, la circunferencia p_1 pasará en el arco de una circunferencia, cuyo radio l es igual a CD:

$$l = \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

mientras que la banda estrecha en la superficie esférica, que tiene la circunferencia p_1 en calidad de su línea central, se desarrollará en una banda plana que rodea el arco de la circunferencia de radio l.

Viceversa, enrollemos en la superficie de la bola de radio R una banda estrecha que tiene por su línea central un arco de la circunferencia de radio l. Esta caerá en la superficie esférica a lo largo del círculo menor. El radio de este círculo se determina de la ecuación

$$l = \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

No es difícil hallar que

$$r = \frac{Rl}{\sqrt{R^2 + l^2}}.$$

CAPÍTULO II. CIERTAS PROPIEDADES DE LAS CURVAS PLANAS Y ESPACIALES Y LOS PROBLEMAS CORRESPONDIENTES

§ 5. TANGENTE Y NORMALES A LAS CURVAS PLANAS Y LOS PROBLEMAS CORRESPONDIENTES

1. TANGENTE A UNA CURVA. Sea dada en un plano o en el espacio una curva q que lleva el punto A (fig. 43). Examinemos otro punto B en la misma curva. Unamos los puntos A y B con la recta n. Esta recta se denomina secante. Hagamos aproximarse el punto B hacia A, desplazándolo por la curva q; en este procedimiento la secante n girará alrededor del punto A. Precisamente, cuando el punto B ocupe sucesivamente las posiciones de los puntos B_1, B_2, B_3, ..., la secante n va a ocupar las posiciones de las rectas AB_1, AB_2, AB_3, ... Cuando el punto B tienda al punto A, la secante n tiende a una posición límite representada por cierta recta n_0. Esta *posición límite de la secante*, la recta n_0, se denomina *tangente a la curva* q en el punto A.

Imaginémonos que por la curva q se mueve un punto material que se desprende de la curva en el punto A. Al haberse desprendido, el punto empezará el movimiento por inercia a lo largo de la tangente n_0 a nuestra curva en el punto A.

2. NORMAL. Supongamos ahora que la curva q está dispuesta en cierto plano (tal curva se llamará curva plana). Se denomina *normal* a la curva q en el punto A a una recta MN que pasa por el punto A y es perpendicular a la tangente n_0 a la curva q en este punto (fig. 44).

3. DISTANCIA MÁS CORTA ENTRE DOS CURVAS. Examinemos un punto A, capáz de desplazarse sólo por la curva q. Sea P la resultante de las fuerzas, que actúan sobre el punto A (fig. 45). Descompongamos la fuerza P en dos componentes: la componente *tangente* P_1 (dirigida según la tangente a la curva q en el punto A) y la componente *normal* P_2 (dirigida por la normal a la curva q en el punto A). La componente tangente desplaza el punto A por la curva q. *Por esto, el punto A se encuentra en equilibrio si la componente tangente P_1 está ausente, es decir, si P coincide con P_2 y, por tanto, la fuerza P está dirigida por la normal a la curva q en el punto A.*

Examinemos dos curvas q y q_1; buscaremos la más corta de las líneas r, un extremo de las cuales A se encuentra en la

curva q y el otro, B, en la curva q_1 (fig. 46). Supondremos las líneas q y q_1 inmóviles y rígidas. Consideraremos un hilo elástico r, uno de los extremos del cual A desliza por la curva q y el otro extremo, B, por q_1 (se puede imaginar, por ejemplo, que en el punto A se tiene un anillo pequeño a través del cual se ha

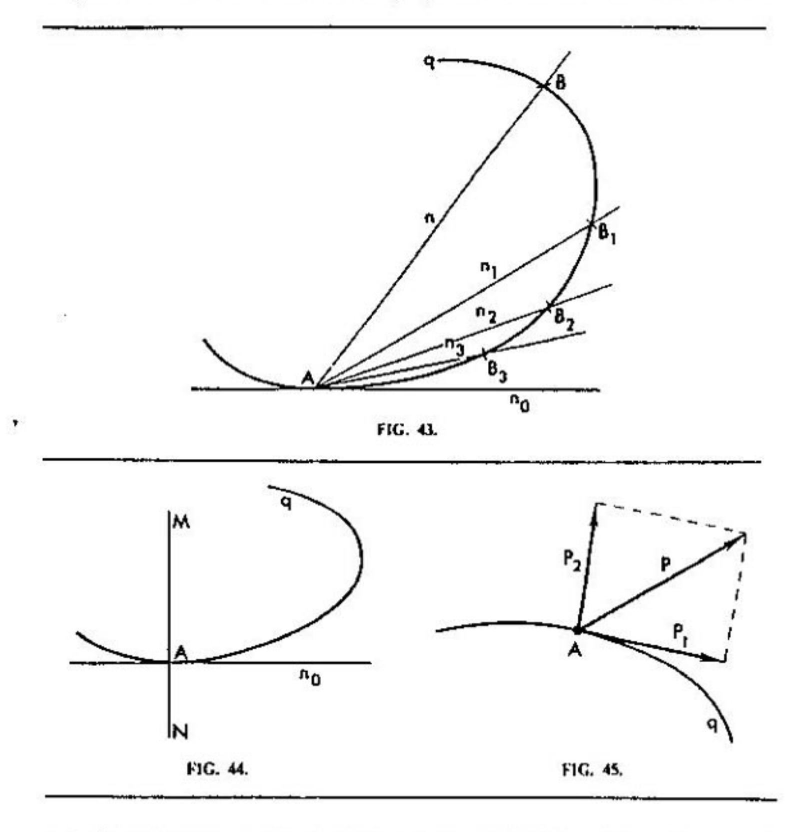


FIG. 43.

FIG. 44.

FIG. 45.

pasado la curva q; en el punto B se encuentra otro anillo en el que está pasada la curva q_1; en estos anillos están fijados los extremos del hilo). El hilo r se esfuerza ocupar la posición en que su longitud será mínima. Sea A_0B_0 precisamente esta posición y el hilo se encuentra equilibrado. Obviamente, A_0B_0 es un segmento rectilíneo que une los puntos A_0 en q y B_0, en q_1 (si esta línea no fuera un segmento rectilíneo, se la podría acortar, conservando las posiciones de sus extremos). Dado que el hilo está equilibrado

en la posición A_0B_0, está en equilibrio su extremo A_0. El punto A_0 es accionado por la fuerza de tensión dirigida según el segmento A_0B_0. En virtud de la condición de equilibrio de un punto en la curva, obtenida anteriormente, el segmento A_0B_0 es la normal a la curva q en el punto A_0. De manera análoga se prueba que este segmento es la normal a la curva q_1 en el punto B_0.

Así pues, *la línea más corta de aquellas que unen los puntos de dos curvas es la normal común a estas curvas.*

De modo igual, *la línea más corta de las líneas, que unen el punto A con la curva q_1, es la normal a la curva q, trazada del punto A.*

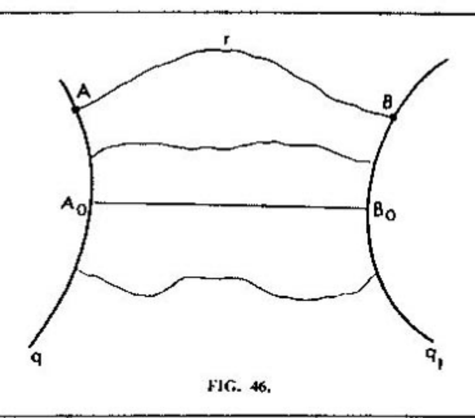


FIG. 46.

4. PROBLEMA DE REFLEXIÓN. Sea q una curva fija. Examinemos toda una serie de curvas ACB que unen dos puntos dados A y B y tienen el punto C, común con la curva q, o, como suele decirse, las curvas unen los puntos A y B, reflejándose de la curva q.

Consideremos el hilo $\widehat{ACB}$ cuyos extremos A y B están fijados y cuyo punto C se desplaza por la curva q (fig. 47).

Sea AC_0B una línea más corta de todas líneas que unen los puntos A y B, reflejándose de curva q (C_0 es un punto de la curva q). Ocupando la posición AC_0B, el hilo está equilibrado.

Es evidente que ambas partes, AC_0 y C_0B, de la línea más corta son segmentos rectilíneos. El punto C_0 del hilo en la curva está equilibrado. Este punto se encuentra bajo la acción de las fuerzas de tensión cuyas magnitudes son [1]: la fuerza T_1, dirigida

[1] La fuerza de tensión es igual para todos los puntos del hilo.

según el segmento C_0A, y la fuerza T_2, dirigida por el segmento C_0B; su resultante T_0 está dirigida según la bisectriz del ángulo AC_0B. En vista de la condición de equilibrio T_0 está dirigida por la normal a la curva q en el punto C_0. Quiere decir, la bisectriz del ángulo AC_0B es la normal a la curva q en el punto C_0.

La línea más corta de todas las curvas, que unen los puntos A y B reflejándose de la curva q, es la quebrada AC_0B con vértice C_0 en la curva q, en el cual la normal a esta curva coincide con la bisectriz del ángulo AC_0B.

5. LAS DISTANCIAS MÁS CORTAS EN UN RECINTO. Consideraremos los recintos en un plano, limitados con ciertas líneas. Los recintos pueden ser finitos (recinto I en la fig. 48) e infinitos (recinto II

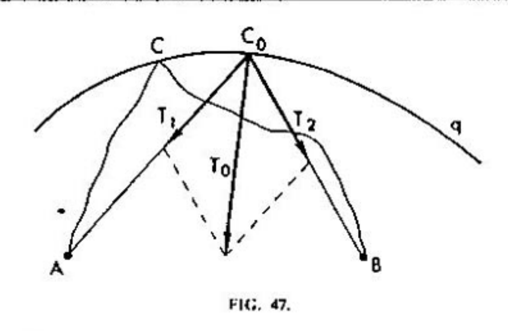


FIG. 47.

en la misma figura, que se obtiene excluyendo el recinto I del plano).

Buscaremos una línea más corta de las que unen en el recinto I dos puntos A y B, pertenecientes a este recinto. Esta línea $\overset{\frown}{AB}$ es la posición de equilibrio de un hilo flexible que se encuentra dentro del recinto I y está fijado en los puntos A y B, con la particularidad de que la frontera del recinto la vamos a considerar vallada. El hilo puede contener las partes de la frontera q del recinto I.

Sea $s_0 = AD_1E_1D_2E_2 \ldots D_nE_nB$ la más corta de las líneas s. Consiste de las partes $\overset{\frown}{E_1D_1}$, $\overset{\frown}{E_2D_2}$, ..., $\overset{\frown}{E_nD_n}$ de la frontera (en la fig. 48, $n = 3$) y de las líneas AD_1, E_1D_2, ..., E_nB que se ubican íntegramente (excluidos los extremos) dentro de I. Obviamente, cada una de las líneas AD_1, E_1D_2, ..., E_nB es un segmento rectilíneo.

Cada parte de la frontera D_1E_1, D_2E_2, ..., D_nE_n, que es parte integrante de s_0, gira su convexidad hacia I. En efecto, para todo tramo $\overset{\frown}{CC'}$, lo suficientemente pequeño, de la frontera q, que gira su convexidad hacia II, la cuerda CC' se dispone en I. Esta cuerda es más corta que el arco $\overset{\frown}{CC'}$; por eso, si la línea s_0 contuviera tal arco $\overset{\frown}{CC'}$ de la frontera, podríamos acortar s_0, sustituyendo el arco $\overset{\frown}{CC'}$ por la cuerda CC' dispuesta en el dominio I.

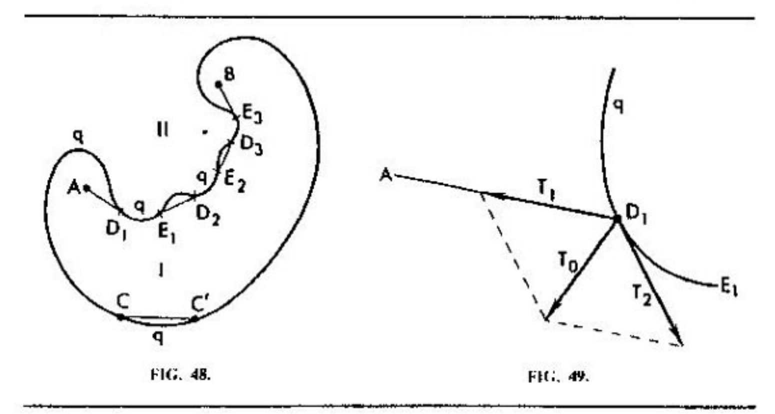


FIG. 48. FIG. 49.

Así pues, la línea más corta sólo puede contener las partes de la frontera que giran su convexidad hacia el dominio I.

Los segmentos AD_1, E_1D_2, ..., $E_{n-1}D_n$, E_nB, integrantes de s_0, tocan la curva q en los puntos correspondientes D_1, E_1, D_2, E_2, ..., D_n, E_n (fig. 48).

En efecto, en el punto D_1, por ejemplo, convergen dos partes del hilo; segmento AD_1 y la parte $\overset{\frown}{D_1E_1}$ de la curva q. La tensión T_1 de la parte AD_1 está dirigida por el segmento D_1A (fig. 49) y la tensión T_2 de la parte $\overset{\frown}{D_1E_1}$ está dirigida por la tangente a q en el punto D_1.

Si el ángulo, formado por las direcciones T_1 y T_2, es distinto de 180°, la resultante T_0 de las fuerzas T_1 y T_2 desplazará el punto D_1 (fig. 49), es decir, el hilo no estará equilibrado. Este ángulo es igual a 180°, esto es, el segmento AD_1 se toca con q en el punto D_1.

Así pues, la línea más corta que une los puntos A y B en el recinto I consta de los segmentos de las tangentes AD_1, E_1D_2, ...

..., E_nB y de los tramos de la frontera D_1E_1, D_2E_2, ..., D_nE_n que giran su convexidad hacia el recinto I.

Al considerar las líneas más cortas en la superficie poliédrica (en la pág. 12) se hizo una especificación referente a la disposición de una recta en un desarrollo. A base del material expuesto en este punto se puede desistir de la limitación impuesta arriba.

§ 6. ALGUNOS CONCEPTOS DE LA TEORÍA DE CURVAS PLANAS Y ESPACIALES

1. CIRCUNFERENCIA OSCULADORA. Sea dada una curva plana q (fig. 50). En el punto A de esta curva tracemos la tangente KL y la normal MN; tracemos también toda una serie de circunferencias que se tocan con la recta KL en el punto A (es decir que a la par con q tienen la tangente común en el punto A)

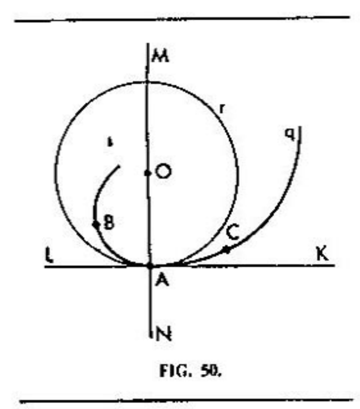


FIG. 50.

Es evidente que los centros de estas circunferencias se disponen en la normal MN.

Entre todas estas circunferencias existe una que es la más próxima a la curva q en el punto A. En nuestro dibujo esta circunferencia es r y se denomina *circunferencia osculadora*. El arco menor $\overset{\frown}{BC}$ de la curva q, que encierra el punto A, se puede tomarlo, aproximadamente por el arco de la circunferencia osculadora r. Cuanto menor es el arco $\overset{\frown}{BC}$, tanto mayor es la exactitud con que podemos sustituirlo por el arco del círculo r. El punto O que es el centro del círculo r, se denomina, a veces, *centro de*

curvatura. Pues bien, el arco menor $\overset{\frown}{BC}$ de la curva q, que encierra el punto A, se lo puede considerar aproximadamente como arco de una circunferencia cuyo centro se ubica en el centro de curvatura, es decir, en el punto O.

El centro de un círculo se dispone en el punto de intersección de dos sus radios y, como los radios son normales del círculo, podemos decir que el centro de un círculo se encuentra en el punto donde se intersecan sus normales.

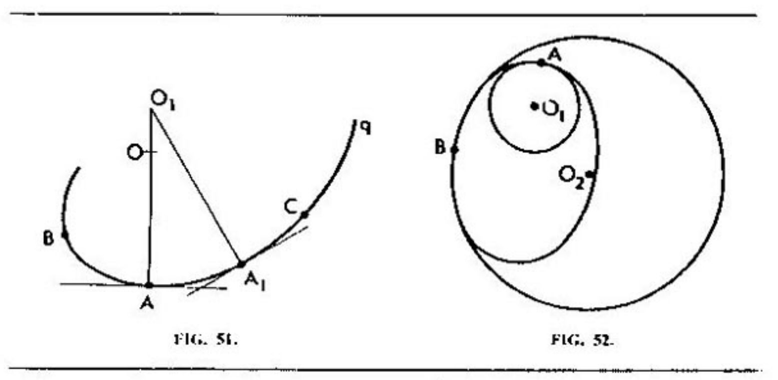


FIG. 51. FIG. 52.

Examinemos ahora una curva arbitraria q, un punto A en esta curva y un arco menor $\overset{\frown}{BC}$ que encierra dicho punto (fig. 51). Este arco puede tomarse aproximadamente por un arco de la circunferencia osculadora en el punto O. ¿Cómo se halla el centro de esta circunferencia (el centro de curvatura)?

Puesto que consideramos aproximadamente el arco $\overset{\frown}{BC}$ como arco de la circunferencia osculadora, podríamos indicar el siguiente procedimiento para construir el centro de curvatura. Tracemos una normal a la curva q en el punto A y en algún otro punto A_1 de la curva, próximo a A. Estas dos normales se intersecarán en el punto O_1. Si tomamos nuestro arco $\overset{\frown}{BC}$ por el arco de la circunferencia osculadora, entonces, el punto O_1, según lo anterior, será precisamente el centro de la circunferencia osculadora (centro de curvatura).

OBSERVACIÓN. Nuestra construcción del centro de la circunferencia osculadora será aproximada. Cuanto menor es el arco $\overset{\frown}{BC}$, tanto más precisa es la construcción. Podemos determinar (exactamente) el centro

de curvatura de la curva q en el punto A como una posición límite a la cual tiende el punto de intersección de la normal en el punto A con la normal en el punto vecino A_1, cuando el punto A_1 tiende al punto A. Cuanto más próximo al punto A es el punto A_1, en el cual levantamos otra normal, tanto más próximo es el punto O_1, donde se intersecan dichas normales, a la posición límite, esto es, al punto O. Una circunferencia osculadora se puede determinarla como circunferencia de radio OA con el centro en O.

EJEMPLO. En la fig. 52 están construidos, aplicado el método aproximado, los centros de curvatura y circunferencias osculadoras en los vértices B y A de una elipse.

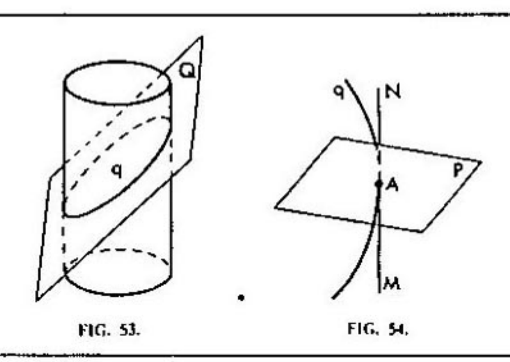


FIG. 53. FIG. 54.

2. CURVAS ESPACIALES. Hasta ahora hemos considerado las curvas en un plano. Pasemos ahora al estudio de las curvas en un espacio. Advertiremos que existen curvas que no pueden caber en el plano. Tales son, por ejemplo, líneas helicoidales.

Supongamos, en efecto, que está dada una línea helicoidal q en la superficie de un cilindro; si la línea q estuviera dispuesta en cierto plano Q, sería la línea de intersección de este plano con el cilindro. Son posibles dos casos: o bien el plano Q se interseca con el eje del cilindro, o bien el plano es paralelo al mismo eje. Si el plano se interseca con el eje del cilindro, cortará este último por una curva cerrada (elipse, véase fig. 53) y no por la línea helicoidal que no es cerrada. Si, en cambio, el plano es paralelo al eje del cilindro, cortará su superficie a lo largo de dos rectas o, tocando la superficie del cilindro, tiene con ella una recta común, o bien, por fin, no se interseca con el cilindro. En todo caso la línea helicoidal no puede ser línea de intersección del plano con la superficie del cilindro.

La tangente a una curva espacial se determina igual que en el caso de una curva plana. Llamaremos *normal* a la curva espacial

q en su punto A a toda recta que pasa por el punto A y es perpendicular a la tangente en este punto. Más, en cualquier punto de la recta se puede levantar en el espacio una infinidad de perpendiculares. Por esto, existe una infinidad de normales en el punto A de la curva q: ellas llenan todo el plano, perpendicular a la tangente en el punto A (fig. 54).

3. PLANO OSCULADOR. Tomemos en la curva q el punto A y la recta MN, tangente a la curva q en este punto (fig. 55). Sea A_1 un punto en la curva, muy próximo al punto A. El pequeño tramo $\overset{\frown}{AA_1}$ de la curva espacial q puede ser considerado, aproximada-

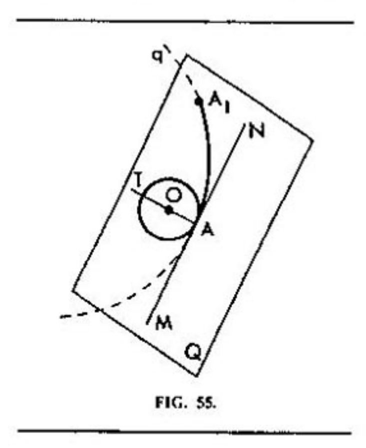


FIG. 55.

mente, como un arco de la curva plana. El plano Q que pasa por la tangente MN y por el punto A_1, se lo puede considerar, aproximadamente, como un plano en el cual se dispone el arco pequeño $\overset{\frown}{AA_1}$ de nuestra curva. El plano Q se denomina *plano osculador a la curva q en el punto A.*

OBSERVACIÓN. Demos la definición exacta del plano osculador. Tracemos el plano Q' que pasa por la tangente MN a nuestra curva en el punto A y por otro punto A_1 de la misma curva. Supongamos que el punto A_1 tiende al punto A, desplazándose por la curva q; en este caso el plano Q' irá girando alrededor de MN y tenderá al plano límite Q. Este plano límite se llama *plano osculador.* Si el punto A_1 está muy próximo al punto A, el plano Q, que pasa por MN y el punto A_1, será muy próximo al plano límite Q. Por esta razón, tal plano Q' puede considerarse, aproximadamente, como plano osculador.

4. NORMAL PRINCIPAL. Se llama *normal principal* a la curva q en el punto A a una normal AT dispuesta en el plano osculador (fig. 55).

Si la curva q se encuentra íntegramente en el plano Q (es decir, si la curva q es plana), Q será el plano osculador para todos los puntos de la curva q, mientras que las normales a q, dispuestas en este plano, son sus normales principales.

5. CIRCUNFERENCIA OSCULADORA PARA UNA CURVA ESPACIAL. El pequeño arco de una curva espacial que contiene el punto A, se lo puede considerar, aproximadamente, como arco plano dispuesto en el plano Q que se toca con la curva q en el punto A. Pero, todo arco plano, en su turno, puede considerarse, aproximadamente, como arco de la circunferencia osculadora (que está dispuesta en el mismo plano y tiene con la curva una tangente común). Por lo tanto, el pequeño arco de la curva q, que encierra el punto A, se lo puede considerar, aproximadamente, como arco de cierta circunferencia en el plano osculador (fig. 55). Esta circunferencia se llama *circunferencia osculadora de una curva espacial*. Su centro O se encuentra en la normal principal a la curva. Así, los pequeños tramos de las curvas planas y espaciales pueden considerarse como arcos de las circunferencias osculadoras. *Cuanto menor es el arco de la curva, tanto mayor es la precisión con que los arcos de la curva pueden sustituirse por los arcos de las circunferencias osculadoras.*

Toda esta información se necesita para las consideraciones posteriores.

§ 7. ALGUNOS CONCEPTOS DE LA TEORÍA DE LAS SUPERFICIES

1. PLANO TANGENTE Y LA NORMAL A UNA SUPERFICIE. Examinemos una superficie S y un punto A en esta superficie (fig. 56); un pedazo pequeño de la superficie alrededor del punto A se lo puede considerar, aproximadamente, como un pedazo del plano Q que se denomina *plano tangente* a la superficie S en el punto A. El *plano tangente* Q es un plano en el cual se disponen las rectas tangentes en el punto A a las curvas que se ubican en la superficie S y pasan por el punto A.

Si trazamos en S dos curvas q y q_1, que pasan por el punto A y tienen en este punto tangentes no coincidentes, LL_1 y MM_1, entonces el plano tangente Q será el que se determina por las rectas LL_1 y MM_1.

Se llama *normal* a la superficie S en el punto A a una recta que pasa por A y es perpendicular al plano tangente Q en el punto A de la superficie S.

La normal AN a la superficie sirve de normal a todas las curvas que están dispuestas en esta superficie y pasan por el punto A (en el caso general no será su normal principal en este punto).

EJEMPLOS. La normal a la superficie de una bola en cierto punto de ésta es el radio de la bola en dicho punto.

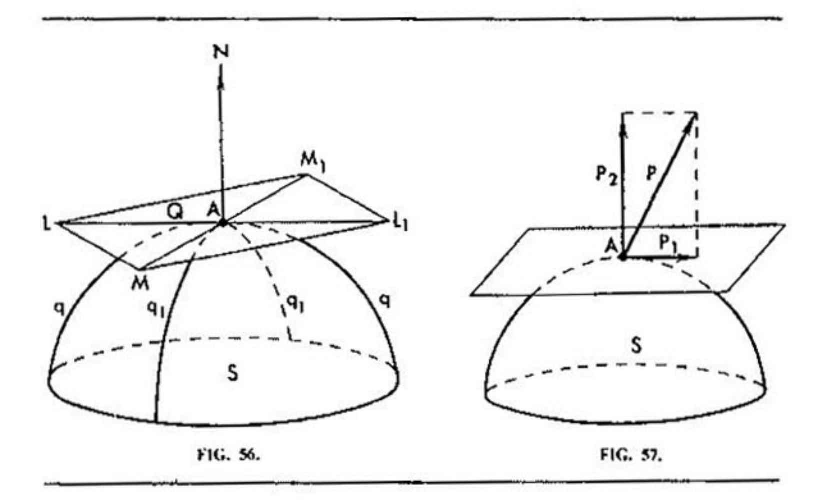


FIG. 56. FIG. 57.

La normal a la superficie de un cilindro en cierto su punto es el radio de una sección circular del cilindro en este punto.

OBSERVACIÓN. No es obligatorio que una curva tenga tangente en cada uno de sus puntos. Elijamos por ejemplo, una línea quebrada. Para ella no se puede determinar una tangente en su vértice. Del mismo modo, no es obligatorio que una curva espacial tenga algún plano osculador y una superficie, algún plano tangente y una normal, etc. Por ejemplo, una superficie cónica no tiene plano tangente, ni tampoco normal al vértice del cono.

Limitémonos en lo ulterior sólo por las *curvas "suaves"*, es decir, por las curvas que en cada de sus puntos tienen la tangente, el plano osculador, el centro de curvatura y también por las *superficies "suaves"*, es decir, por aquellas que tienen normal en cada uno de sus puntos. En una superficie sólo examinamos las curvas "suaves".

2. CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN PUNTO EN UNA SUPERFICIE. Examinemos un punto A, capaz de trasladarse sólo por la superficie S. Sea P la resultante de las fuerzas que actúan sobre este punto (fig. 57). Designemos con P_1 la componente tangente de la fuerza P (es decir, la componente que se dispone en el plano Q tangente a S en el punto A), y con P_2, la componente normal dirigida por la normal a la superficie S en el punto A. La componente tangente P_1 hace desplazarse el punto A por la superficie, por lo cual para que el punto A esté equilibrado en la superficie es menester que sea nula la componente tangente P_1. Esto significa que la fuerza P coincide con su componente normal P_2. *Así pues, para que el punto A esté equilibrado en una superficie es necesario que la resultante P de las fuerzas que actúan sobre el punto A, sea dirigida por la normal a la superficie en este punto.*

3. ALGUNOS PROBLEMAS REFERENTES A LAS LÍNEAS ESPACIALES MÁS CORTAS. Hállese la línea más corta que une los puntos de dos curvas espaciales.

Reiterando los razonamientos del punto 3, del § 5, nos convenceremos de que la línea más corta que une los puntos de dos curvas, es un segmento de su normal común.

En particular, la línea que representa la distancia más corta entre los puntos de dos rectas en el espacio (que no se intersecan) es un segmento de su perpendicular común.

Por fin, análogamente se puede demostrar que la distancia más corta entre dos superficies es un segmento de su normal común.

CAPÍTULO III. LÍNEAS GEODÉSICAS

§ 8. TEOREMA DE J. BERNOULLI SOBRE LAS LÍNEAS GEODÉSICAS

1. EQUILIBRIO DE UN HILO ELÁSTICO EN LA SUPERFICIE. En cierta superficie S están dados dos puntos A y B. Estos puntos pueden unirse con una infinidad de las líneas dispuestas en la superficie. Entre todas ellas existe una línea más corta q. Nuestra tarea es explorar las propiedades de esta línea más corta.

Imaginémonos un hilo de goma tendido en la superficie y fijado en los puntos A y B (fig. 58). Al adquirir la forma de la línea más corta q, este hilo se pone equilibrado. En efecto, si lo sacamos de la posición q, haciéndolo cambiar algo de forma,

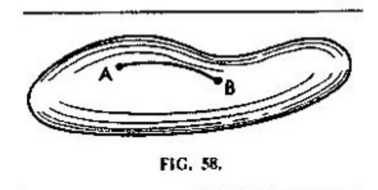


FIG. 58.

alargamos el hilo y éste, en su aspiración de reducirse, tomará de nuevo la posición de q. Por consiguiente, el *hilo dispuesto por la linea más corta q estará en la posición de equilibrio y este equilibrio será estable.*

Empezaremos con el estudio de la linea de equilibrio de un hilo elástico en una superficie.

Examinemos, al principio, el hilo $\overset{\frown}{AB}$ que tiene la forma del arco de una circunferencia (fig. 59). Sobre el tramo $\overset{\frown}{CD}$ de nuestro hilo actúan las tensiones de las demás partes del hilo, precisamente en el punto C actúa la tensión de la parte CA del hilo, en el punto D, la tensión de la parte DB. Estas tensiones están dirigidas por las tangentes en los puntos C y D. Designémolas por P_1 y P_2. Las fuerzas P_1 y P_2 son iguales en su valor, de lo contrario la parte $\overset{\frown}{CD}$ del hilo no quedaría en el estado de equilibrio. Hallemos la resultante de las fuerzas P_1 y P_2.

Sea M el punto de intersección de las tangentes en los puntos C y D (según estas tangentes están dirigidas las fuerzas P_1 y P_2). Traslademos las fuerzas P_1 y P_2 en el punto M. Es fácil ver

que la resultante estará dirigida hacia el centro O de la circunferencia (en la cual se dispone el hilo $\overset{\frown}{AB}$). Designemos con E el centro del arco $\overset{\frown}{CD}$. La resultante de las fuerzas de tensión, que actúan sobre el arco $\overset{\frown}{CD}$, pasa por el centro E de este arco y está dirigida por el radio EO. Dado que el radio EO constituye una normal al arco $\overset{\frown}{AB}$ en el punto E, en definitiva obtenemos: *la resultante de las fuerzas de tensión que actúan sobre el arco de la circunferencia $\overset{\frown}{CD}$, pasa por el centro E de este arco y está dirigida según la normal a la circunferencia en el punto E.*

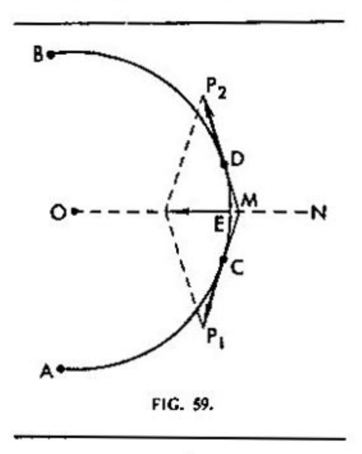


FIG. 59.

Consideremos ahora un caso general. En una superficie está tendido un hilo de goma que es fijado en los puntos A y B y toma la forma de la curva q.

Elijamos un tramo pequeño $\overset{\frown}{CD}$ de este hilo[1]. Sobre $\overset{\frown}{CD}$ actúan las fuerzas de tensión P_1 y P_2, aplicadas en los puntos C y D y dirigidas según las tangentes a q en estos puntos. Podemos tomar el arco pequeño de nuestra curva por un arco de la circunferencia osculadora en el centro E de este arco. El radio EO de dicha circunferencia está dirigido por la *normal principal a la curva q en el punto E*. La resultante de las fuerzas de tensión que actúan sobre el arco de la circunferencia irá por

[1] Por ser $\overset{\frown}{CD}$ muy pequeño, podemos tomarlo por un arco de la circunferencia y utilizar el mismo dibujo 59.

el radio que pasa por el centro de este arco, en el caso dado, por el radio EO. Así, la *resultante de las fuerzas de tensión, que actúan sobre el arco pequeño* $\overset{\frown}{CD}$ *de nuestro hilo, pasa por su centro* E *y está dirigida por la normal principal* EO *en el punto* E.

Ahora ya no es difícil hallar las condiciones bajo las cuales el hilo queda equilibrado. Si el hilo se encuentra en el estado de equilibrio, está equilibrada, entonces, cada su parte menor $\overset{\frown}{CD}$. Para que el arco $\overset{\frown}{CD}$ esté equilibrado es necesario que esta resultante sea dirigida según la normal a la superficie. Las fuerzas de tensión, que actúan sobre $\overset{\frown}{CD}$, tienen la resultante dirigida por la normal principal EO a la curva q. Quiere decir que la misma recta EO tiene que ser simultáneamente la normal principal a la curva q en el punto E y la normal a la superficie S en este punto.

Obtenemos el teorema siguiente: *para que un hilo elástico* q, *tendido en la superficie* S, *esté equilibrado, es necesario que en cualquier punto* A *de este hilo la normal principal en* A *coincida con la normal a la superficie.*

2. LÍNEAS GEODÉSICAS. *Se llama línea geodésica en la superficie* S *a una línea* q *tal que en cada su punto la normal principal coincide con la normal a la superficie.*

La línea geodésica puede determinarse igual que una línea superficial en la cual el plano osculador pasa, en cada uno de sus puntos, por la normal a la superficie en dicho punto. Efectivamente, sea A un punto en la curva q dispuesta en la superficie S. La normal a la superficie en el punto E es, en el mismo tiempo, la normal a la curva q en este punto; esta normal será normal principal, si está dispuesta en el plano que se toca con q en el punto A.

El teorema demostrado más arriba puede enunciarse así:

Un hilo tendido en la superficie estará equilibrado, si está dispuesto a lo largo de la línea geodésica de esta superficie.

EJEMPLO 1. En la superficie de un cilindro los hilos tendidos se dispondrán, como nos convencimos más arriba, a lo largo de las líneas helicoidales. *Es por eso que las líneas helicoidales son líneas geodésicas en la superficie del cilindro.* Las normales principales a las líneas helicoidales coinciden con normales a la superficie del cilindro, mientras que las normales a la superficie del cilindro son radios de las secciones circulares. Así pues, las *normales principales de las líneas helicoidales son los radios de secciones circulares.*

EJEMPLO 2. Aclaremos en qué caso una curva plana q puede ser línea geodésica en cierta superficie S. Designemos con Q un plano en el que se dispone la línea q. Para la curva plana q el mismo plano Q sirve de plano osculador en todo punto de la curva.

En virtud de la segunda definición de la línea geodésica, si la curva q es una línea geodésica, entonces las normales a la superficie S en los puntos de la curva q se deben disponer en su plano osculador, es decir, las normales a la superficie S en los puntos de la curva q deben disponerse en el plano Q.

EJEMPLO 3. Examinemos la superficie de una bola. Cortemos esta superficie con el plano Q que pasa por el centro de la bola. Obtendremos el así llamado circulo mayor en la superficie de la bola. El *círculo mayor es la línea geodésica en la superficie esférica.*

En efecto, las normales a la superficie de la bola en sus puntos están representadas por los radios de la bola. Los radios en los puntos del círculo mayor se disponen en el plano de este círculo. Tenemos el caso de una curva plana en la superficie en cuyos puntos las normales a la superficie se disponen en el plano de esta curva. Acabamos de convencernos de que tal curva plana es una línea geodésica.

Si cortamos la bola con el plano Q_1, que no pasa por el centro de la bola, obtendremos un círculo menor en la superficie de la bola. Puesto que las normales a la superficie de la bola (es decir, los radios de la bola) en los puntos del círculo menor no están en el plano de este circulo, el circulo menor no es la línea geodésica en la superficie de la bola.

Un hilo de goma tendido tenso por un arco del círculo mayor estará en el estado de equilibrio. Al tenderlo, en cambio, por un arco del círculo menor, se deslizará de este arco, dado que no se encontrará equilibrado en esta posición.

TEOREMA DE JOHANN BERNOULLI. *La línea más corta de todas las que unen dos puntos en la superficie, es un arco de la línea geodésica.*

Ya poseemos la demostración del teorema de Bernoulli. En efecto, por un lado hemos demostrado que las líneas, según las cuales se disponen los hilos tendidos en una superficie y equilibrados, son líneas geodésicas. Por otro lado sabemos que un hilo de goma en una superficie, sujetado en los puntos A y B de esta superficie y dispuesto por una línea más corta que une dichos puntos, se encuentra en el estado de equilibrio (una serie de otras demostraciones elementales se puede encontrarlas en el folleto de M. Ya. Vigodski "Geometría diferencial", Gostechizdat, 1949).

OBSERVACIÓN. Por los puntos A y B en la superficie de una bola tracemos el círculo mayor q. Los puntos A y B lo dividen en dos arcos (fig. 60); el arco $\overset{\frown}{AMB}$ y el arco $\overset{\frown}{ANB}$. Ambos estos arcos son líneas geodésicas que unen los puntos A y B. Sea el arco $\overset{\frown}{AMB}$ más corta que $\overset{\frown}{ANM}$. Entonces, evidentemente, $\overset{\frown}{AMB}$ es el arco más corto en la superficie de la bola que une los puntos A y B; el arco $\overset{\frown}{ANB}$, aunque es una línea geodésica, no será el arco más corto en la superficie de la bola que une los puntos A y B. Un hilo de goma tendido en la superficie

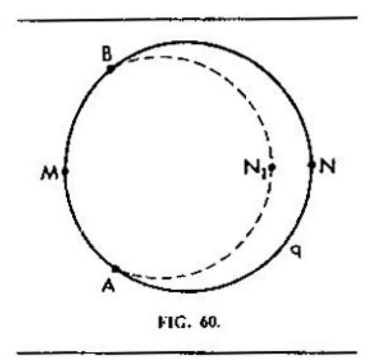


FIG. 60.

de la bola por cualquiera de estos arcos se encontrará en el estado de equilibrio. Pero, mientras que el hilo tendido por el arco $\overset{\frown}{AMB}$ se encuentra en el estado de equilibrio *estable*, el hilo tendido por el arco $\overset{\frown}{ANB}$ se halla en el estado de equilibrio *no estable*. Si hacemos el hilo salir de la posición $\overset{\frown}{ANB}$ de modo tal que tome la forma de la curva $\overset{\frown}{AN_1B}$ (fig. 60), próxima a $\overset{\frown}{ANB}$ pero más corta que el último, el hilo se deslizará por la superficie de la bola, alejándose de la posición $\overset{\frown}{ANB}$.

Así pues, vemos que la *propiedad de ser la línea geodésica es una condición necesaria, pero no suficiente para que la línea sea más corta.*

Se puede, sin embargo, señalar que un arco suficientemente pequeño de la línea geodésica es siempre la línea más corta.

La línea geodésica se puede determinarla como una línea cuyos arcos suficientemente pequeños son líneas más cortas.

3. "CONSTRUCCIÓN" DE LA LÍNEA GEODÉSICA. Hagamos pasar el filo de un cuchillo por una superficie S. En cualquier momento el filo del cuchillo toca la superficie en algún punto A (fig. 61). Vamos a mantener el cuchillo en la posición tal que la normal a la superficie en el punto de contacto con el filo del cuchillo siempre pase por el plano del cuchillo. Una línea q, que arañará el filo del cuchillo en la superficie S, será

geodésica. En efecto, examinemos un arco pequeño $\overset{\frown}{BC}$ de la curva q arañada por el cuchillo y el punto A en ella. Podemos considerar aproximadamente que el arco $\overset{\frown}{BC}$ se encuentra en el plano del cuchillo en el instante, cuando su filo toca la superficie en el punto A. De este modo, el plano del cuchillo, en el instante de tocarse su filo con la superficie en el punto A, es un plano osculador de la curva q en el punto A. Pero sabemos de lo expuesto más arriba que si el plano osculador de la curva q pasa invariablemente por la normal a la superficie, la curva q es geodésica. Por consiguiente, la curva q *es geodésica en nuestra superficie.*

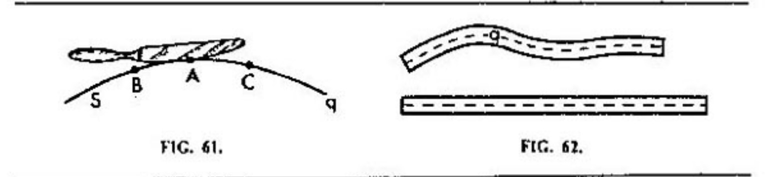


FIG. 61. FIG. 62.

Para una superficie arbitraria existe un problema más: desarróllese una banda estrecha, recortada de la superficie, en un plano y, viceversa, enróllese una banda plana en una superficie. Hace falta precisar qué se tiene en cuenta.

Sea dada en una superficie la curva q. Dispongámosla dentro de una banda estrecha (fig. 62). En general, esta banda no puede desarrollarse en un plano sin que no se alteren las longitudes de las curvas dispuestas en la banda. No obstante, cuanto más estrecha es la banda tanto menos serán estas alteraciones relativas[1].

Enrollada la banda estrecha de la superficie en el plano, la línea más corta de la banda, que une dos puntos, pasará en un arco que posee la propiedad análoga en la banda plana, es decir, en un segmento de una recta. Viceversa, un segmento rectilíneo en la banda plana pasará, siendo enrollada la banda en la superficie, en el arco más corto en ella, es decir, en una línea geodésica. Por ello, una banda estrecha (una cinta cuya anchura es una magnitud ínfima en comparación con su longitud) que encierra el segmento rectilíneo, *caerá en la superficie de manera tal que el segmento de una recta pase en un arco geodésico.* Nuestra cinta estrecha caerá en la superficie a lo largo de la línea geodésica. Por esta razón, colocando en la superficie las largas cintas estrechas, se puede imaginar el curso de las líneas geodésicas en la superficie.

[1] En el lenguaje del análisis infinitesimal las alteraciones en la longitud de las curvas serán infinitésimos de orden superior en comparación con la anchura de la banda.

§ 9. OBSERVACIONES ADICIONALES SOBRE LAS LÍNEAS GEODÉSICAS

1. PLANO DE SIMETRÍA. Demos ahora unos ejemplos de las líneas geodésicas. Previamente recordaremos al lector una definición: *dos puntos A y A' se llaman simétricos respecto al plano Q, si están dispuestos por los lados opuestos del plano Q, son equidistantes de éste y se sitúan en la misma perpendicular al plano mencionado* (fig. 63).

Dos figuras q y q' se denominan simétricas respecto del plano Q, si a todo punto A de la figura q le corresponde el punto A' de la figura q', simétrico a A respecto de Q, y viceversa (fig. 64).

El plano Q se llama *plano de simetría* de la superficie S, si divide S en dos partes simétricas con relación a Q.

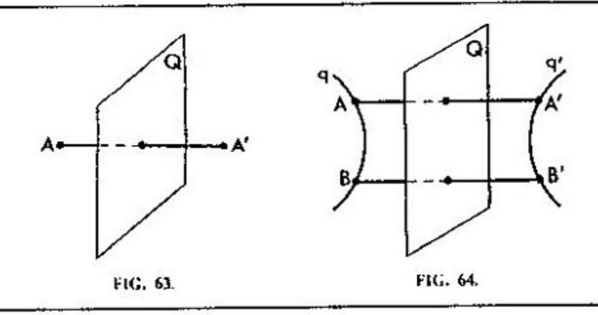


FIG. 63. FIG. 64.

EJEMPLOS Para la superficie de una bola el plano de simetría será cualquier plano que pasa por el centro de la bola.

Para las superficies de un cono redondo y de un cilindro los planos de simetría serán aquellos que pasan por sus ejes.

Para un cilindro circular limitado el plano de simetría será un plano que es perpendicular al eje del cilindro y divide su altura en dos partes iguales.

Para un cilindro infinitamente largo (es decir, para un cilindro cuyas generatrices son rectas infinitas) cualquier plano perpendicular al eje será el plano de simetría.

TEOREMA *Supóngase que la superficie S posee un plano de simetría Q que corta S por la línea q. La línea q es una línea geodésica de la superficie*[1].

[1] Recordamos que estamos considerando solo superficies suaves.

Según la suposición, la línea q se dispone en el plano Q. La línea plana q (véase el ejemplo 2 del párrafo anterior) será geodésica, si la normal a la superficie S en cualquier punto de la curva q se encuentra en el plano Q.

Sea A un punto arbitrario de la curva q (fig. 65). Demostraremos que la normal a la superficie S en el punto A se encuentra en el plano Q. Supondremos lo recíproco: la normal AB a la superficie S en el punto A no se encuentra en el plano Q. Designemos con AB' una recta simétrica con AB respecto a Q.

Puesto que AB no pertenece a Q, AB será distinta de AB'. Mas, Q es el plano de simetría para la superficie, y si AB es una normal a S en el punto A, entonces la recta AB', que es simétrica a AB, será también normal a S en el punto A. Así pues, la superficie S posee en el punto A dos normales, lo que es imposible.

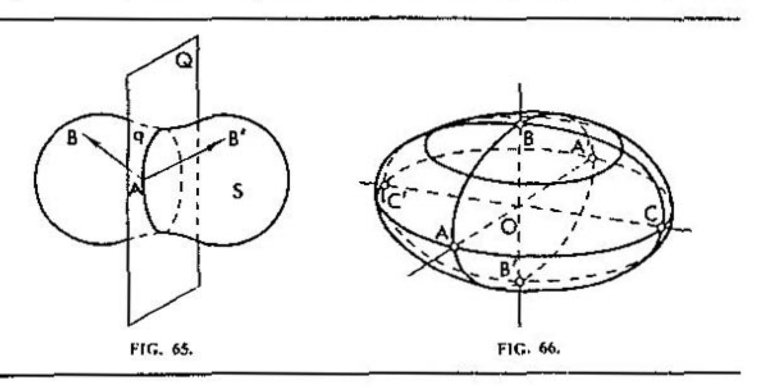


FIG. 65. FIG. 66.

Hemos llegado a una contradicción y, consecuentemente, hemos demostrado que la normal a S en cualquier punto A de la curva se encuentra en el plano Q. El teorema queda así plenamente demostrado.

2. LÍNEAS GEODÉSICAS CERRADAS. Si agarramos la superficie S con un lazo hecho del hilo de goma de modo tal que el hilo resulte en la posición de equilibrio, tomará el hilo una forma de cierta curva cerrada q. Esta línea q es una *línea geodésica* y, además, *cerrada*. Así por ejemplo, un lazo de goma en la superficie de una bola, si se le comunica la forma del círculo mayor, estará en el estado del equilibrio. Los círculos mayores en la superficie de una bola comó también las elipses (esto es, meridianos en la superficie de un elipsoide de revolución) son líneas geodésicas cerradas (véanse las superficies de revolución en el § 10).

Si una superficie cerrada S tiene unos cuantos planos de simetría, *cada plano de simetría* (en virtud del teorema demostrado más arriba) corta la superficie por una línea geodésica cerrada.

Un elipsoide con tres ejes, AA', BB', CC', que se diferencian en longitud (fig. 66), tiene tres planos de simetría, cada uno de los cuales pasa por dos ejes del elipsoide. Estos tres planos se intersecan con el elipsoide a lo largo de tres elipses E_1, E_2, E_3, que son tres líneas geodésicas cerradas.

Se puede demostrar que *en toda superficie cerrada se tienen por lo menos tres líneas geodésicas cerradas*[1].

3. PRINCIPIO DE HERTZ. Un punto que se mueve en un plano por inercia describe una línea recta (el primer principio de Newton).

Un punto que se mueve por una superficie y que no es accionado por ningunas fuerzas externas, describe una línea geodésica.

En esto consiste el *principio de Hertz*. Por ejemplo, un punto en la superficie de una bola, si no es accionada por ningunas fuerzas externas, se mueve por el círculo mayor, un punto en la superficie de un cilindro, por una línea helicoidal.

En efecto, la aceleración que experimenta un punto que se mueve por la curva q, se la puede descomponer en la *tangencial* (orientada según la tangente a q) y la *normal* (orientada según la normal principal a la curva q). Si están ausentes las fuerzas externas, el punto que se mueve por la curva q, dispuesta en la superficie S, soporta sólo una reacción de la superficie la que está orientada por la normal a esta última. Como la dirección de la fuerza coincide con la dirección de aceleración, esta última para nuestro punto ha de coincidir con la dirección de la normal a la superficie. La normal a la superficie en un punto de la curva es perpendicular a la tangente a la curva q en el mismo punto. Puesto que la aceleración está orientada por la normal a la superficie, es decir, perpendicularmente a la tangente a la curva q, la aceleración tangencial es nula. Por consiguiente, el punto elegido sólo tiene la aceleración normal orientada según la normal principal a q. La dirección de la aceleración es al mismo tiempo la dirección de la normal principal a la curva q y de la normal a la superficie S. Quiere decir, estas direcciones coinciden en cualquier punto de la curva q, de donde se deduce que la curva q es una línea geodésica en la superficie S.

---

[1] La demostración de este teorema no elemental se da en el artículo "Métodos topológicos en los problemas de variaciones y su aplicación a la geometría diferencial de las superficies" por L. A. Liustérnik y L. Shnirelman. YMH II, cuadr. 1 (17), (1947).

4. LÍNEAS GEODÉSICAS EN UNA SUPERFICIE CON ARISTA. Examinemos una superficie S compuesta de dos superficies suaves S_1 y S_2 que se juntan por una curva s, la que llamaremos *arista* de la superficie S (como ejemplo de tal superficie puede servir un ángulo diedro). Tomemos en la superficie S dos puntos A y B dispuestos en S_1 y S_2, respectivamente (fig. 67), y sea $q_0 = ACB$ la posición de equilibrio de un hilo elástico en la superficie S. Admitamos que el punto C pertenece a la arista s, y los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$ de la curva q_0, a las partes S_1 y S_2, respectivamente. Es obvio que $\overset{\frown}{AC}$ es la línea geodésica en S_1, y $\overset{\frown}{CB}$, la línea geodésica en S_2. Hallemos las condiciones de equilibrio en el punto de inflexión C,

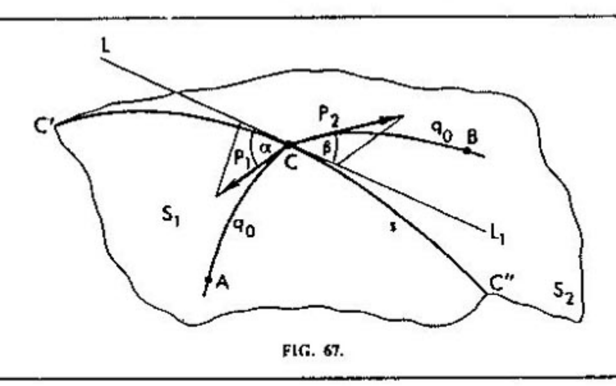


FIG. 67.

empleando el método a que ya concurrimos en el § 8. La curva q_0 es la posición de equilibrio del hilo flexible en la superficie S, sujetado en los puntos A y B.

Designemos con α el ángulo formado por el arco $\overset{\frown}{AC}$ y la parte CC' de la arista s; con β, el ángulo formado por la parte CC'' de la arista s y el arco CB (es decir, el ángulo formado por sus tangentes). Sobre el punto C actúan las fuerzas de tensión: P_1, dirigida por la tangente al arco $\overset{\frown}{CA}$, y P_2 dirigida por la tangente al arco $\overset{\frown}{CB}$. Cada una de estas fuerzas equivale a T. Las proyecciones de estas fuerzas sobre la tangente LL_1 a la arista s en el punto C son iguales a $T\cos\alpha$ y $T\cos\beta$, respectivamente y están orientadas en direcciones opuestas. La condición de equilibrio

$$T\cos\alpha = T\cos\beta$$

nos da

$$\alpha = \beta \qquad (1)$$

Los ángulos, que en el punto de inflexión forman con la arista s los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$, son iguales.

Es natural llamar q_0 la línea *geodésica* en la superficie S.

Si la superficie S consta de varias partes suaves separadas por las aristas

$$s_1, s_2, \ldots, s_n,$$

las líneas geodésicas (líneas de equilibrio del hilo flexible) en las superficies de este género constan de los arcos de líneas geodésicas que se juntan en las aristas

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

con la particularidad de que en todo punto de la juntura se cumple la condición (1).

Las líneas más cortas en la superficie S son líneas geodésicas. La propiedad de las líneas más cortas en las superficies poliédricas, obtenida en el § 1, es un caso particular de la propiedad de las líneas geodésicas (y más cortas) en las superficies con aristas.

La propiedad mencionada de las líneas geodésicas en tales superficies se la puede deducir también del principio de Hertz.

§ 10. LÍNEAS GEODÉSICAS EN LAS SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

1. SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN. Hagamos girar una curva plana q alrededor de la recta AB que se encuentra en el mismo plano con q (fig. 68). Como resultado de esta revolución se engendra cierta superficie S que se llama superficie de revolución. Todo plano Q, que pasa por el eje de revolución AB, corta S a lo largo de un par de curvas q y q'. Estas curvas se denominan *meridianos*. Se obtienen de la curva q, haciendo girarla un ángulo correspondiente alrededor del eje de revolución. Todo plano perpendicular al eje corta S por una circunferencia llamada paralela.

TEOREMA 1. *Todos los meridianos de una superficie de revolución son líneas geodésicas.*

En efecto, examinemos los meridianos q y q', obtenidos como resultado de intersección de la superficie de revolución con el plano Q que pasa por el eje AB. Q es un plano de simetría de la superficie de revolución S, y, por lo tanto, corta la super-

ficie S por las curvas geodésicas. Así pues, las líneas q y q' son geodésicas.

EJEMPLO. Hagamos girar una elipse E alrededor de su eje (fig. 69). Se obtendrá el así llamado elipsoide de revolución. Sus meridianos son las elipses iguales a E. Estas elipses son geodésicas.

OBSERVACIÓN. En la superficie de un cilindro todas las paralelas son líneas geodésicas; en la superficie de una bola la linea

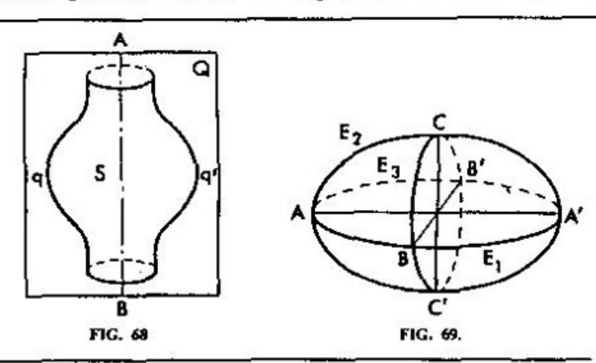


FIG. 68 FIG. 69.

geodésica se representa sólo con el ecuador; en la superficie de un cono ni una de las paralelas es línea geodésica.

2. TEOREMA DE CLAIRAUT. Consideraremos una linea geodésica q en la superficie de revolución S. Sean A un punto arbitrario de la línea geodésica q; r la distancia entre el punto A y el eje de revolución (radio de la paralela); α ángulo, formado por la linea geodésica q y el meridiano en el punto A.

TEOREMA 2 (DE CLAIRAUT). *En todo punto de la línea geodésica q la expresión r sen α es una magnitud constante:*

$$r \operatorname{sen} \alpha = c = \text{const.} \tag{1}$$

Al designar con β el ángulo, formado por la linea geodésica y la paralela, la fórmula (1) toma la forma

$$r \cos \beta = \text{const.}$$

El caso particular del teorema de Clairaut para las superficies cónicas y cilíndricas ya fue demostrado (véase el p. 4, § 3).

Examinemos la superficie S_n, formada por la revolución de una quebrada $A_0A_1 \ldots A_n$ alrededor del eje L. La superficie S_n consta de n superficies $s_1, s_2, \ldots, s_n$, obtenidas como resultado de la revolución de los lados correspondientes $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$. Estas superficies están separadas una de otra por las "aristas"

$t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, que son paralelas formadas en la revolución de los vértices de la quebrada $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$.

Consideraremos dos puntos A y B en la superficie S_n y la línea geodésica q_0 que los une. Debido a lo demostrado en el p. 4, § 9, la línea geodésica q_0 consta de los arcos geodésicos en las superficies de conos truncados o de cilindros

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

que se juntan a lo largo de las aristas

$$t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$$

con la particularidad de que los ángulos, formados por cada uno de los arcos geodésicos empalmados y la "arista", son iguales entre sí. Al desplazarse a lo largo de q_0, el ángulo β, que la curva q_0 forma con la paralela, cambia continuamente, sin saltos (un salto en el cambio de este ángulo podría ocurrir cuando la paralela se convierte en una de las "aristas", pero en virtud del dicho anteriormente, los saltos no tienen lugar). Por esta razón, la magnitud $r \cos \beta$ también va cambiando continuamente, sin saltos.

Veamos que sucede con la magnitud $r \cos \beta$, cuando nos desplazamos por q_0. Mientras avanzamos por una de las superficies

$$s_0, s_1, \ldots, s_n$$

la expresión $r \cos \beta$ queda constante (en virtud del caso particular del teorema de Clairaut ya demostrado). Al pasar a través de una de las "aristas"

$$t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$$

esta expresión no experimenta saltos. Quiere decir, ella queda constante en toda la línea q_0. De este modo, para todos los puntos de la línea geodésica q_0 se verifica la correlación

$$r \cos \beta = \text{const.}$$

Una curva plana arbitraria m puede considerarse como curva límite para los polígonos inscritos m_n, cuando el número de sus lados n crece ilimitadamente y la longitud del lado mayor tiende a cero. La superficie S, engendrada por la revolución de m alrededor de cierto eje, es un límite para las superficies S_n, formadas por la revolución de m_n alrededor del mismo eje. Para las líneas más cortas en las superficies S_n se cumple el teorema de Clairaut. De aquí deducimos que este teorema se cumple también para las líneas más cortas en la superficie S.

CONFERENCIA 2

CAPÍTULO IV. PROBLEMAS REFERENTES A LA ENERGÍA POTENCIAL DE UN HILO ESTIRADO

§ 11. MOVIMIENTOS DE LAS LÍNEAS QUE NO ALTERAN LA LONGITUD DE ÉSTAS

1. ENERGÍA POTENCIAL DE UN HILO FLEXIBLE. Convengamos en que un hilo flexible experimenta la tensión T igual en todos sus puntos, y que esta tensión queda invariable cuando el hilo cambia de longitud. Determinemos la energía potencial del hilo.

Sea $q = \overset{\frown}{ABC}$ una curva suave de longitud l, que se compone de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ de longitud l_0, y $\overset{\frown}{BC}$ de longitud $(l - l_0)$ (fig. 70). Supongamos que el hilo, que ocupaba la posición AB, pasó, siguiendo la curva q, en la posición $\overset{\frown}{ABC}$ de modo tal que con el punto A sujeto, el punto B describe la línea $\overset{\frown}{BC}$ de longitud $(l - l_0)$. Examinemos el trabajo cumplido por las fuerzas de tensión.

Las fuerzas de tensión en el punto B realizaron el trabajo expresado por $T(l - l_0)$.

El trabajo de las fuerzas de tensión, que actúan sobre el arco menor EE' de la curva q, es nulo. En efecto, la resultante de estas fuerzas está dirigida por la normal a la curva q, mientras que el arco EE' se desliza por la propia curva q.

De este modo, el trabajo total de las fuerzas de tensión en el movimiento del hilo se reduce al trabajo de la fuerza aplicada al extremo B, es decir, es igual a

$$T(l - l_0) = Tl - Tl_0.$$

Sea V_0 la energía potencial del hilo cuando éste ocupaba la posición $\overset{\frown}{AB}$, y V, la energía potencial del mismo hilo en la posición ABC. El incremento de la energía potencial $V - V_0$ es igual al trabajo realizado, es decir,

$$V - V_0 = Tl - Tl_0$$

ó

$$V - Tl = V_0 - Tl_0 \qquad (1)$$

Consideramos que, cuando la longitud del hilo tiende a cero, la energía potencial tiende a cero; por consiguiente, para $l_0 \to 0$ tenemos $V_0 \to 0$, y, por lo tanto, $(V_0 - Tl_0) \to 0$. Pasando al límite en el segundo miembro de la igualdad (1) para $l_0 \to 0$, obtenemos:

$$V - Tl = 0,$$

de aquí

$$V = Tl \tag{2}$$

La energía potencial de un hilo flexible es igual a su longitud multiplicada por la tensión.

COROLARIO. Si al desplazarse el hilo el trabajo de las fuerzas de tensión es nulo, la longitud del hilo queda invariable. Efectiva-

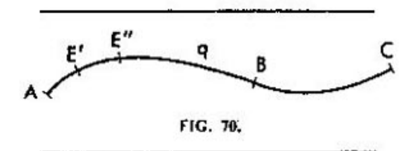


FIG. 70.

mente, en estas condiciones no ha variado la energía potencial del hilo, a la que es proporcional la longitud del hilo.

Observemos que si un segmento rectilíneo AB se desplaza, quedando rectilíneo, la energía total de las fuerzas de tensión se reduce al trabajo de las fuerzas de tensión en los extremos de este segmento.

El trabajo del hilo que mantiene la forma de la quebrada ACB se reduce al trabajo de las fuerzas de tensión en los extremos A y B de la quebrada y en su vértice C.

2. LÍNEAS PARALELAS. Dos líneas con normales comunes se denominan *paralelas*. De ejemplos más simples de las líneas paralelas sirven las rectas paralelas y circunferencias concéntricas.

TEOREMA 1. *Los segmentos de las normales comunes entre las líneas paralelas q y q_1 tienen igual longitud.*

Supongamos que AB, que es la normal común para las curvas q y q_1, se desplaza desde la posición A_0B_0 hasta la posición A_1B_1, siendo siempre la normal común a las dos curvas (fig. 71).

El trabajo de las fuerzas de tensión en este desplazamiento es nulo. En efecto, en el extremo A la fuerza de tensión está dirigida según la normal a la curva, por lo cual, al desplazarse este extremo a lo largo de la curva q, el trabajo de las fuerzas de tensión es igual a cero. Análogamente, en el extremo B, que es

desplazado por la curva q_1, el trabajo de las fuerzas de tensión es nulo. Así, pues, para nuestro caso del desplazamiento de la normal común el trabajo de las fuerzas de tensión es nulo. En virtud del corolario enunciado, la longitud l de la normal común no cambia de valor en este caso:

$$l(A_0B_0) = l(A_1B_1).$$

3. NORMALES A UNA ELIPSE Y UNA PARÁBOLA. *Se denomina elipse a un lugar geométrico de los puntos B, para los cuales la suma de*

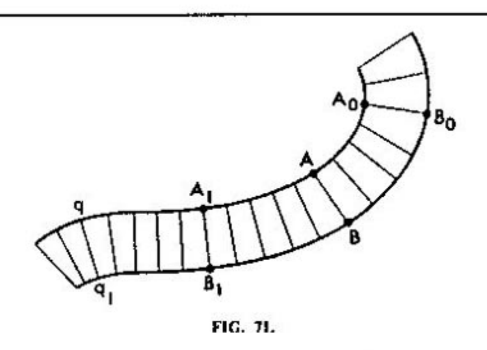


FIG. 71.

distancias hasta los puntos dados, F y F_1, es una magnitud constante:

$$FB + F_1B = 2a \tag{3}$$

(a es una magnitud constante).

Los puntos F y F_1 se llaman *focos* de la elipse, los segmentos FB y F_1B son *radios vectores.*

TEOREMA 2. *La normal a la elipse en cualquier punto B es la bisectriz BD del ángulo FBF_1, formado por los radios vectores* (fig. 72).

En efecto, supongamos que un hilo elástico en forma de la quebrada FBF_1 está fijado en los puntos F y F_1 si desplazamos este hilo, haciendo que el punto B se traslade por la elipse, la longitud del hilo no varía (en virtud de (3)). Quiere decir que el trabajo de las fuerzas de tensión es siempre nulo. El trabajo de las fuerzas de tensión se reduce al trabajo de las fuerzas en el punto B. En este punto están aplicados dos fuerzas iguales de tensión dirigidas por BF y BF_1. Su resultante P está dirigida por la bisectriz BD del ángulo FBF_1. Puesto que en el desplazamiento del punto B por la elipse el trabajo P es siempre nulo,

entonces P está siempre dirigida por la normal a la elipse. Por consiguiente, la normal a la elipse, en cualquier su punto B, coincide con la bisectriz del ángulo FBF_1.

Se llama parábola a un lugar geométrico de los puntos B cuyas distancias de un punto dado F y de una recta dada d, son iguales entre sí:

$$FB = BC \tag{4}$$

(*BC es una perpendicular bajada de B a la recta d* (fig. 73)). El punto F se denomina *foco* de la parábola, la recta d se llama *directriz* y la recta LL, que es perpendicular a d y pasa por el

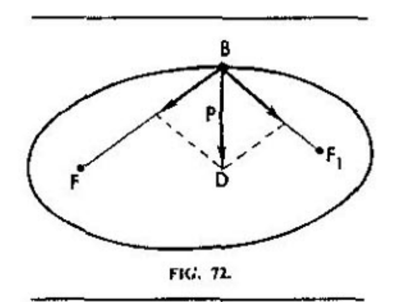


FIG. 72.

foco, el eje de la parábola. Tracemos una recta d_1, paralela a d, de un modo que el foco F y la directriz d se encuentren por un lado de d_1. Designemos con a la distancia entre las rectas paralelas d y d_1. Tracemos por el punto B de la parábola una perpendicular común CC_1 a las rectas d y d_1 (CC_1 es paralela al eje LL). Tenemos:

$$CC_1 = CB + BC_1 = a,$$

donde a es una constante igual a la distancia entre las rectas paralelas d y d_1. En virtud de (4)

$$FB + BC_1 = a. \tag{5}$$

Ahora no es difícil demostrar la siguiente afirmación.

TEOREMA 3. *La normal es un punto arbitrario B de la parábola es la bisectriz del ángulo FBC, formado por el radio vector FB y la recta BC_1, paralela al eje LL.*

Consideraremos un hilo que tiene forma de una quebrada FBC_1 cuyo extremo F está fijado, mientras que el extremo C_1 se desliza por la recta d_1 de tal modo que BC_1 quede perpendicular a d_1, y el punto B se desliza por la parábola.

La longitud de este hilo queda inalterable (lo que proviene de la fórmula (5)) y esto significa que el trabajo total de las fuerzas de tensión es nulo. Este trabajo es la suma de los trabajos de fuerzas de tensión en los puntos C_1 y B. El trabajo de la fuerza de tensión en el punto C_1 es nulo, puesto que la dirección de esta fuerza (por el segmento C_1B) es perpendicular a la recta d_1 por la cuál se desplaza el punto C_1. Por lo tanto,

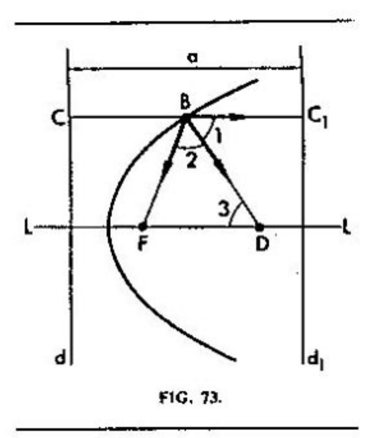


FIG. 73.

el trabajo de las fuerzas de tensión en el punto B es también nulo. Reiterando los razonamientos aplicados en la investigación de una elipse, llegamos a la demostración del teorema [1].

OBSERVACIÓN. Del teorema 3 se deduce una regla para construir normales a la parábola. Llevemos sobre el eje LL un segmento FD, igual al radio vector FB de la parábola. La recta BD es una normal a la parábola.

En efecto, en la fig. 73 los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ son iguales como angulos internos alternos dentro de las paralelas LL y CC_1 y la secante BD; los ángulos $\angle 3$ y $\angle 2$ son iguales, puesto que el triángulo FBD es isósceles. De aquí obtenemos: $\angle 2 = \angle 1$, es decir, BD es la bisectriz del ángulo FBC; quiere decir, en virtud del teorema 3, es la normal a la parábola en el punto B.

[1] Hemos demostrado este teorema, de hecho, para los puntos dispuestos en la parte de la parábola que se encuentra a la izquierda de la recta d. Mas, como la posición de esta recta (paralela a d) es arbitraria, el teorema es válido, pues, para todos los puntos de la parábola.

4. TANGENTES GEODÉSICAS NORMALES. Si el arco geodésico $\widehat{AB}$ se desplaza por una superficie, el trabajo lo realizan sólo las fuerzas de tensión que actúan sobre los extremos A y B del arco. Efectivamente, la resultante de las fuerzas, que actúan sobre cualquier parte menor interior del arco $\widehat{AB}$, está dirigida según la normal a la superficie y, por lo tanto, su trabajo en el desplazamiento por la superficie es nulo.

Se llama *tangente geodésica* a la curva q en el punto B de una superficie a una línea geodésica r que en el punto B tiene

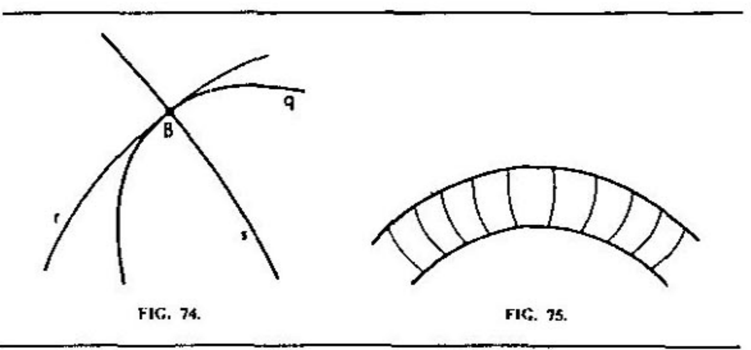


FIG. 74. FIG. 75.

con q una tangente común; lleva el nombre de la *normal geodésica* a la curva q en el punto B una línea geodésica s, que es ortogonal a q en el punto B (fig. 74).

El teorema 1 sobre las normales comunes se generaliza para el caso de las normales geodésicas.

TEOREMA 4. *Supongamos que dos curvas q y q_1 en una superficie tienen comunes todas las normales geodésicas. Los segmentos de las normales geodésicas comunes entre q y q_1 tienen longitudes iguales* (fig. 75).

EJEMPLO. Los segmentos de meridianos en la superficie de una bola entre dos paralelas tienen longitudes iguales.

La demostración del teorema 4 es la misma que la demostración del teorema 1.

5. CIRCUNFERENCIA GEODÉSICA. Partiendo del punto A llevemos sobre la superficie toda una serie de los arcos geodésicos $\widehat{AB}$ de igual longitud. El lugar geométrico q de sus extremos B se llama *circunferencia geodésica*; los arcos geodésicos $\widehat{AB}$ se denominan *radios geodésicos* (fig. 76).

Todo radio geodésico $\widehat{AB}$ *es una normal geodésica a la circunferencia geodésica en el punto B.*

En efecto, supongamos que un hilo elástico $\widehat{AB}$, que está sujeto en el extremo A y que tiene forma de un radio geodésico, se desplaza de tal manera que su extremo B describa una circunferencia geodésica q. Como que la longitud del arco geodésico $\widehat{AB}$ no varía, el trabajo de las fuerzas de tensión es igual a cero.

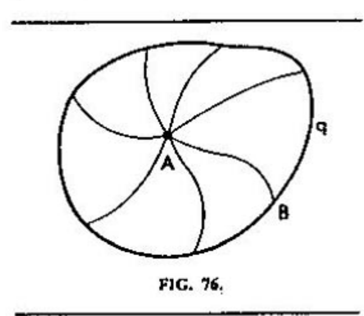


FIG. 76.

Este trabajo se reduce al trabajo de las fuerzas de tensión en el extremo B. Quiere decir, el trabajo de las fuerzas de tensión en el punto B es siempre nulo. Las fuerzas de tensión están dirigidas según la normal a la línea de desplazamiento q. Y como su dirección en el punto B es la dirección tangente al radio $\widehat{AB}$, llegamos a nuestro teorema.

§ 12. EVOLUTAS Y EVOLVENTES

Consideremos una curva plana q, un haz de las normales trazadas de diferentes puntos de dicha curva y una *envolvente s* de estas normales (es decir, la curva s que es tangente a las normales). La envolvente s se llama *evoluta* de la curva q, y la curva q, que se interseca con todas las tangentes a la evoluta s bajo un ángulo recto, se llama *evolvente* (fig. 77).

Todo punto B de la evoluta es un punto de intersección de la normal AB a la evolvente con la normal $A'B'$, infinitamente próxima a la primera, es decir, el punto B es el centro de curvatura para la curva q en el punto A (véase el § 6). La evoluta s de la curva q, se puede determinarla como un *lugar geométrico de los centros de curvatura de esta curva.*

→ "LA EVOLVENTE" (82)

Qué un hilo elástico tenga forma de la curva r, compuesta de un segmento de la normal AB a la evolvente y de un arco $\overset{\frown}{BD}$ de la evoluta s (véase la fig. 77). Desplazándonos por esta curva de A a D experimentamos en el punto B un paso *suave* del segmento AB al arco BD. Por esto, el hilo elástico en la posición $r = \overset{\frown}{ABD}$ se encuentra en la posición de equilibrio. Hagamos trasladarse el hilo r de tal modo que su extremo A se mueva

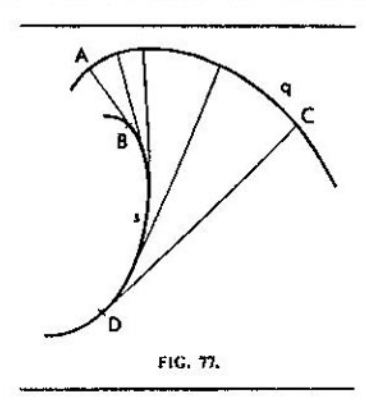


FIG. 77.

por la evolvente, y el punto B, por la evoluta. En este caso AB mantiene su posición de una normal a la evolvente, y la parte restante del hilo BD se adhiere a la curva s. El trabajo de las fuerzas de tensión que actúan sobre los puntos de la normal AB es igual al trabajo de estas fuerzas en los puntos A y B. Mas, en el punto A este trabajo es nulo, puesto que las fuerzas de tensión actúan por la normal a la curva q, por la cual se desliza el extremo A. Las fuerzas de tensión, que actúan en el punto B, están equilibradas y su trabajo en cada instante dado es nulo. Por fin, el trabajo en la parte $\overset{\frown}{BD}$ del hilo, que en el instante dado no participa en el movimiento, es igual a cero. Así pues, el trabajo de las fuerzas de tensión en cada momento dado es nulo. Durante el movimiento en consideración la energia potencial del hilo r queda invariable y, consecuentemente, queda sin cambios algunos la longitud del hilo r.

Si $\overset{\frown}{ABD}$ es una posición inicial del hilo r y el segmento CD, la posición final, entonces la longitud $\overset{\frown}{ABD}$ es igual a la

longitud CD:

$$l(\overset{\frown}{ABD}) = l(CD).$$

Pero,

$$l(\overset{\frown}{ABD}) = l(AB) + l(\overset{\frown}{BD})$$

ó

$$l(CD) = l(AB) + l(\overset{\frown}{BD}),$$

de donde

$$l(\overset{\frown}{BD}) = l(CD) - l(AB).$$

Hemos demostrado el teorema que sigue.

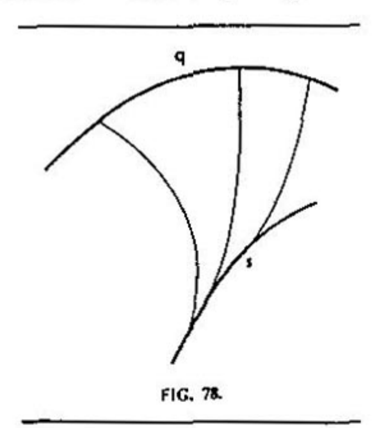


FIG. 78.

TEOREMA. *Si en dos puntos A y C de la evolvente trazamos las normales AB y CD hasta sus puntos de tangencia B y D con la evoluta, entonces la diferencia en longitudes de estos segmentos de las normales es igual a la longitud del arco de la evoluta $\overset{\frown}{BD}$ encerrado entre ellos.*

Si a la curva q en una superficie trazamos un haz de sus normales geodésicas (fig. 78), la envolvente de éstas s se llamará *evoluta geodésica* de la curva q, y la propia curva q, *evolvente geodésica* de la curva s. El teorema sigue siendo válido si las palabras "normal", "evoluta", "evolvente" se entienden como normales geodésicas, evoluta y evolvente geodésicas. El lector mismo puede convencerse de que la demostración es lícita en este caso también.

§ 13. PROBLEMAS REFERENTES AL EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE HILOS ELÁSTICOS

1. PRINCIPIO DE DIRICHLET. *Para un sistema mecánico la posición del mínimo de su energía potencial corresponde a la posición de equilibrio.* En efecto, si un sistema mecánico inmóvil se desvía de la posición S del mínimo de la energía potencial, entonces la energía potencial sólo puede crecer, y, consecuentemente, de acuerdo con el principio de conservación de la energía, la energía cinética del sistema sólo puede disminuir. Por ello, si en la posición S el sistema estaba inmóvil es decir, su energía cinética era nula, entonces, realizado un desplazamiento, el sistema no puede adquirir la energía cinética positiva, es decir, no puede empezar a moverse.

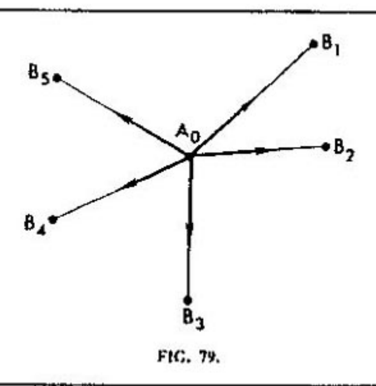


FIG. 79.

EJEMPLO. Para un hilo elástico la energía potencial es proporcional a su longitud. Por eso, la posición en la que el hilo tiene una longitud mínima es la posición de equilibrio del hilo. Hemos aprovechado varias veces esta circunstancia.

He aquí dos problemas en los que se busca el equilibrio del sistema de *varios* hilos (el segundo de estos problemas será de importancia para lo ulterior).

2. PROBLEMA DEL MÍNIMO DE LA SUMA DE LONGITUDES. En un plano están dados los puntos B_1, B_2, ..., B_n. Hállese un punto A tal, que la suma de distancias entre A y los puntos dados sea mínima. Consideremos n hilos elásticos AB_1, AB_2, ..., AB_n, un extremo de los cuales A es común (por ejemplo, los hilos se encuentran

entrelazados en el punto A) y los otros extremos están sujetos en los puntos B_1, B_2, ..., B_n, respectivamente. La energía potencial de nuestro sistema de hilos es proporcional a la suma de longitudes de los hilos AB_1, AB_2, ..., AB_n. A la suma mínima de longitudes de los hilos, es decir, a la energía potencial mínima, la corresponde la posición de equilibrio del sistema. En esta posición cada hilo se representa por un segmento rectilíneo y la suma de longitudes de estos segmentos es mínima. Sea A_0 la posición del punto A en este estado de equilibrio (fig. 79). Sobre A_0 actúan n fuerzas iguales de tensión, dirigidas por A_0B_1, A_0B_2, ..., A_0B_n. Estas n fuerzas se encuentran equilibradas. Así pues, en el punto A_0, para el cual la suma de distancias hasta los puntos B_1, B_2, ..., B_n es mínima, la resultante n de las fuerzas iguales y dirigidas por A_0B_1, A_0B_2, ..., A_0B_n es nula[1].

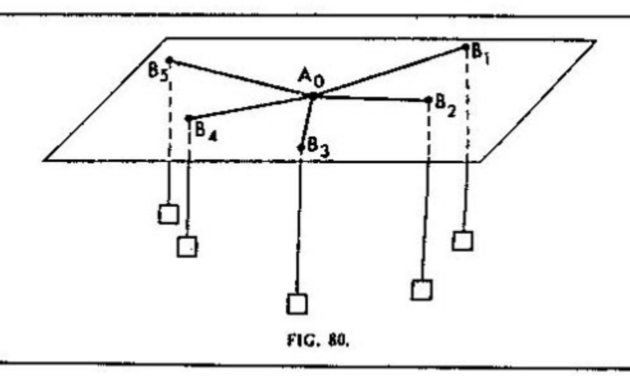


FIG. 80.

Tal punto A_0 puede hallarse por el procedimiento mecánico: en una placa horizontal están hechos n orificios en los puntos B_1, B_2, ..., B_n (fig. 80); atamos n cuerdas en un punto sobre la placa, hacemos pasar estas cuerdas a través de los orificios y suspendemos de ellas las pesas de igual peso. Nuestro sistema de cuerdas

[1] M. Ya. Vigodski señaló que esta oración necesitaba ser precisada. Es válida, si el punto A, para el cual la suma de longitudes AB_1, AB_2, ..., AB_n es mínima, *no coincide* ni con uno de los puntos B_1, B_2, ..., B_n.

Por ejemplo, en el caso de tres puntos B_1, B_2, B_3 el punto A se encuentra dentro del triángulo B_1, B_2, B_3, siempre que ni uno de sus ángulos no es mayor que 120°. Si, en cambio, uno de ellos, por ejemplo, en el vértice B_1 es igual o mayor que 120°, el punto A coincide con este vértice.

con pesas llegará al estado de equilibrio y el punto común de las cuerdas en el estado de equilibrio y el punto común de las cuerdas en el estado de equilibrio será precisamente el punto buscado A_0. En efecto, sobre este punto actúan n fuerzas iguales de tensión de las cuerdas dirigidas hacia los orificios $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (cada una de estas fuerzas equivale al peso de una pesa colgada). Estas n fuerzas iguales están equilibradas.

A nuestro problema se le reduce el problema siguiente: están dados n puntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$; se necesita construir en el punto A un depósito y carreteras rectilíneas de él $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$. Hállese la posición más ventajosa del depósito para que la suma de longitudes de las carreteras $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ sea mínima.

A veces este problema se levanta de un modo más complejo; se supone que la cantidad de cargas del depósito A a los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ es proporcional a $q_1, q_2, \ldots, q_n$, respectivamente. Hace falta encontrar tal posición del punto A para la cual la suma

$$S = q_1\overline{AB}_1 + q_2\overline{AB}_2 + \ldots + q_n\overline{AB}_n$$

sea mínima (es decir, para la cual al suministrar las cargas por las carreteras $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ la cantidad de toneladas por kilómetros sea mínima).

El problema se resuelve igual que el anterior (el que representa su caso particular, cuando $q_1 = q_2 = \ldots = q_n$). Se busca la posición de equilibrio del sistema de n hilos $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$, fijados en los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, con un punto común A. Pero, los hilos $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$, tienen diferentes tensiones, proporcionales a los números $q_1, q_2, \ldots, q_n$ o sea, a $q_1T, q_2T, \ldots, q_nT$, respectivamente. La energía potencial de los hilos $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ es igual a $q_1T\overline{AB}_1, q_2T\overline{AB}_2, \ldots, q_2T\overline{AB}_n$, respectivamente. La energía potencial total del sistema es igual a

$$V = T(q_1\overline{AB}_1 + q_2\overline{AB}_2 + \ldots + q_n\overline{AB}_n) = TS. \qquad (1)$$

La posición del valor mínimo V, es decir, del valor mínimo de la suma S es la posición de equilibrio del sistema. Toda línea AB_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, se transforma en un segmento rectilíneo. El punto común $A = A_0$ de estos hilos se encuentra equilibrado bajo la acción de n fuerzas de tensión dirigidas por los segmentos A_0B_1, $A_0B_2, \ldots, A_0B_n$ y proporcionales a los números $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

El procedimiento mecánico de encontrar el punto buscado A_0, expuesto arriba, conserva su validez; no obstante, las pesas colgadas de los extremos de las cuerdas pasadas a través de los orificios

en los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, deben ser proporcionales a los números $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

3. UN PROBLEMA REFERENTE AL EQUILIBRIO DEL SISTEMA DE DOS HILOS. Consideremos un hilo flexible no homogéneo que tiene forma $q = \widehat{ACB}$ (fig. 81); los puntos A y B del hilo están fijados, mientras que el punto C se desplaza por la curva s, con la particularidad de que en la parte $\widehat{AC}$ del hilo la tensión es T_1, y en la parte $\widehat{CB}$

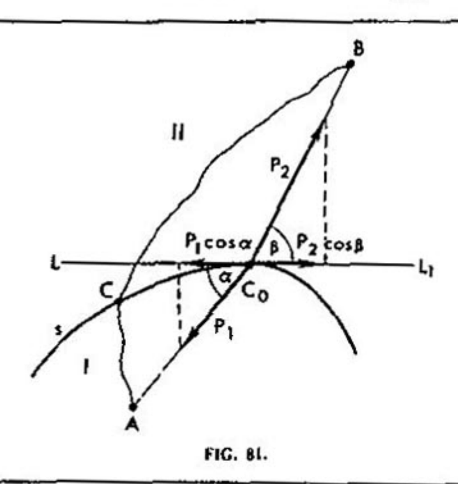


FIG. 81.

del hilo la tensión es igual a T_2. La energía potencial $V(q)$ del hilo es igual a

$$V(q) = V(\widehat{AC}) + V(\widehat{CB}).$$

En virtud de que

$$V(\widehat{AC}) = T_1 l(\widehat{AC}),$$
$$V(\widehat{CB}) = T_2 l(\widehat{CB})$$

tenemos:

$$V(q) = T_1 l(\widehat{AC}) + T_2 l(\widehat{CB}). \qquad (2)$$

Suponiendo que en la posición q_0 el hilo q tiene la energía potencial mínima. En virtud del principio de Dirichlet, el hilo se encuentra equilibrado, ocupando la posición q_0. Sea C_0 el punto de intersección de q_0 y s.

Es fácil ver que cada una de las partes $\overset{\frown}{AC_0}$ y $\overset{\frown}{C_0B}$ de la línea q_0 es un segmento rectilíneo. Examinemos las condiciones de equilibrio en el punto C_0.

A este punto están aplicadas las fuerzas de tensión: la fuerza P_1 dirigida por C_0A e igual a T_1, y la fuerza P_2 dirigida por C_0B e igual a T_2. Tracemos la tangente LL_1 a la curva s en el punto C_0. Introduzcamos las designaciones:

$$\left.\begin{aligned} \angle\, AC_0L &= \alpha, \\ \angle\, L_1C_0B &= \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

La componente tangente de la fuerza P_1 es igual a $P_1 \cos\alpha = T_1 \cos\alpha$ y está dirigida por C_0L; la componente tangente de la fuerza P_2 es igual a $P_2 \cos\beta = T_2 \cos\beta$ y está dirigida por C_0L_1. El punto C_0 está equilibrado, si están equilibradas ambas componentes tangentes, es decir, si

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta. \qquad (4)$$

Así, la línea q_0 es una quebrada AC_0B con vértice C_0 en la curva de separación s, en la cual se cumple la condición (4).

CAPÍTULO V. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

§ 14. CURVATURA Y CURVATURA GEODÉSICA

1. CURVATURAS. La magnitud $\frac{1}{R}$, inversa al radio R de la circunferencia, se llama *curvatura* de la circunferencia. Este concepto se puede ilustrarlo mecánicamente con ayuda de un hilo estirado.

Sea dado un arco $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia de radio R con el centro O. Supondremos que este arco se ha formado por un hilo elástico cuyos extremos soportan las fuerzas de tensión T_1 y T_2, iguales entre sí y dirigidas por las tangentes, como se muestra en la fig. 82.

La resultante T_0 de las fuerzas T_1 y T_2 está dirigida por la bisectriz del ángulo formado por las direcciones de las fuerzas T_1 y T_2, es decir, según el radio que divide el arco $\overset{\frown}{AB}$ en dos partes iguales. Si este arco se mide en radianos expresados por el número α, su longitud es igual a $R\alpha$, y la cuerda, que une los extremos del arco, tiene la longitud $2R\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. Como un arco muy pequeño puede tomarse aproximadamente por la cuerda, deducimos de aquí que $2R\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\approx R\alpha$. De este modo, cuando los valores del ángulo α son muy pequeños, tenemos $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\approx\frac{\alpha}{2}$, es decir, un ángulo pequeño expresado en radianos es igual aproximadamente a su seno.

OBSERVACIÓN. Para mayor precisión, la relación de un ángulo a su seno tiende a 1, entonces el ángulo tiende a cero. La demostración de este teorema se puede encontrarla en cualquier curso del análisis matemático, y también en los manuales de la trigonometría (por ejemplo, manual de Ribkin). Para hacer rigurosos nuestros razonamientos ulteriores conviene introducir la noción de los *infinitésimos equivalentes*.

Se llama infinitésimo a una magnitud variable que tiende a cero.

Supongamos que simultáneamente con la magnitud α tiende a cero la magnitud β (por ejemplo, junto con la longitud de un arco tiende a cero también la longitud de la cuerda que une los extremos del arco). Si en este caso la relación $\frac{\beta}{\alpha}$ de dos infinitésimos β y α, es también un infinitésimo, entonces β se denomina *infinitésimo* del orden superior

en comparación con α. Por ejemplo, α^2 es un infinitésimo del orden superior en comparación con α.

Dos infinitésimos α y γ se llaman equivalentes, si su relación tiende a 1:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma}{\alpha} = 1. \qquad (1)$$

Por ejemplo, una cuerda que une los extremos del arco es equivalente al propio arco.

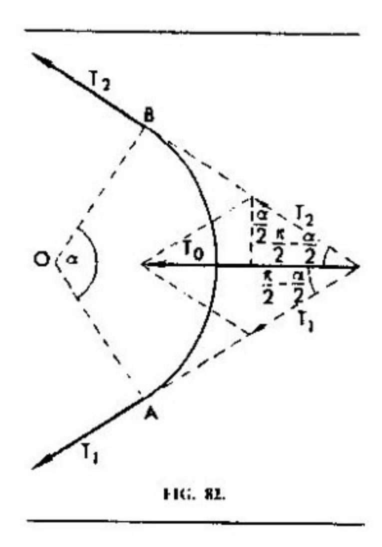


FIG. 82.

La diferencia entre dos infinitésimos γ y α es un infinitésimo del orden superior en comparación con ellos mismos. En efecto, de (1) se infiere:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} = 0. \qquad (2)$$

Es por eso que un error que cometemos al sustituir un infinitésimo por su equivalente es un infinitésimo del orden superior. Por ejemplo, la diferencia en longitudes de un arco infinitesimal y su cuerda es un infinitésimo del orden superior. Un error que cometemos igualando un arco y su cuerda es un infinitésimo del orden superior en comparación con las magnitudes que se parangonan.

Para expresar la equivalencia de las magnitudes α y γ se usa la siguiente anotación: $\alpha \approx \gamma$.

Un ejemplo de las magnitudes equivalentes: sen $\alpha \approx \alpha$, cuando α es un infinitésimo $\left(\text{es la anotación simbólica de la igualdad } \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1\right)$.

El ángulo AOB (fig. 82) medido en radianos designemos mediante α. En este caso el ángulo formado por las direcciones de las fuerzas T_1 y T_2 es igual a $\pi - \alpha$, mientras que el ángulo formado por sus direcciones y la dirección de la resultante T_0 es igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Del dibujo se ve que $T_0 = 2T \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, donde T es la magnitud común de las fuerzas T_1 y T_2.

Si designamos la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ por medio de s, su cantidad α se expresará en radianos así: $\alpha = \frac{s}{R}$.

Por consiguiente,

$$T_0 = 2T \operatorname{sen} \frac{s}{2R}.$$

Si el arco s es muy pequeño, entonces

$$\operatorname{sen} \frac{s}{2R} \approx \frac{s}{2R}$$

y

$$T_0 = T\frac{s}{R}.$$

Examinemos ahora el caso de una curva arbitraria q. Un arco muy pequeño de longitud s de esta curva, que contiene el punto A, puede considerarse como el arco de una circunferencia (cuyo radio R es el radio de curvatura de la curva en el punto A). Supongamos que q es un hilo elástico en cuyos puntos actúa la tensión igual a T. Entonces, sobre nuestro arco actúan dos fuerzas de tensión (aplicadas en sus extremos), cuya resultante está dirigida, en virtud de lo expuesto arriba, por el radio de curvatura y es igual (equivalente, para precisar) a $T\frac{s}{R}$.

La magnitud $\frac{1}{R}$ *se llama curvatura de nuestra línea en el punto A.*

Así pues, *sobre un arco pequeño* $\widehat{AB}$ *actúa, en la dirección de la normal principal, una fuerza proporcional a la longitud del arco s y a la curvatura* $\frac{1}{R}$.

2. CURVATURA GEODÉSICA. Consideraremos (fig. 83) un arco pequeño de longitud s de la curva q, que se dispone en una superficie,

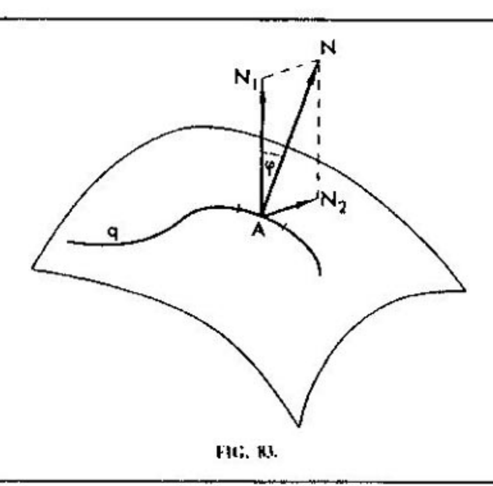


FIG. 83.

y sea A el centro de este arco. Designemos con $\frac{1}{R}$ la curvatura de nuestra línea en el punto A, y con φ, el ángulo formado por normal principal AN de la curva q en el punto A y la normal AN_1 a la superficie. En el punto A actúa sobre nuestro arco una fuerza dirigida según la normal principal a la curva q en el punto A: la magnitud de esta fuerza es $T\frac{s}{R}$. Descompongamos esta fuerza en dos fuerzas: una que actúa por la normal a la superficie (esta fuerza se suprime por la reacción de la superficie) y la otra fuerza que es tangente a la superficie. Esta segunda fuerza hará deslizar nuestro arco por la superficie. La fuerza es igual (equivalente, para mayor precisión) a

$$\frac{Ts \operatorname{sen} \varphi}{R} = Ts\Gamma.$$

La magnitud $\Gamma = \frac{\text{sen } \varphi}{R}$ se denomina *curvatura geodésica* de la curva q en el punto A. Ella determina la intensidad con la cual sobre el arco de un hilo estirado actúa en el punto A la fuerza que hace deslizar este arco por la superficie; la fuerza que actúa sobre el arco pequeño de la curva es proporcional a la longitud del arco s y la curvatura geodésica Γ.

Para una línea geodésica en la que $\varphi = 0$, la curvatura geodésica es nula. A lo largo de la línea geodésica no actúa la fuerza que haría deslizar el arco de la línea por la superficie (el hilo tendido a lo largo de una línea geodésica se encuentra equilibrado).

§ 15. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

1. MEDICIÓN DE LA LONGITUD DEL ARCO DE UNA CIRCUNFERENCIA. Sean dados una circunferencia q de radio R y un arco $\overset{\frown}{AB}$ de dicha circunferencia. Sea $\underset{\smile}{AB}$ un arco próximo al $\overset{\frown}{AB}$ [1]. Designemos con l la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$, y con $l + \Delta l$, la longitud del arco $\underset{\smile}{AB}$. Si transformamos el arco $\overset{\frown}{AB}$ de modo tal que pase en el arco $\underset{\smile}{AB}$, su longitud l aumentará en Δl, y, consecuentemente, su energía potencial aumentará en $T\Delta l$. Transformaremos $\overset{\frown}{AB}$ en $\underset{\smile}{AB}$ de una manera tal que todo punto C del primero se desplace por el radio (fig. 84). Supongamos que un arco muy pequeño CD (una parte de $\overset{\frown}{AB}$) haya pasado en un arco, también pequuño $C'D'$ (una parte de $\underset{\smile}{AB}$). Todo punto de este arco se desplazó a un segmento CC' (por ser muy pequeño CD, consideramos iguales aproximadamente los desplazamientos de sus puntos). Una pequeña plazoleta $CC'D'D$, limitada por nuestros arcos y los segmentos CC' y DD', podemos tomarla, aproximadamente, por un rectángulo, con la particularidad de que, si h es la longitud del arco pequeño CD, entonces el área de $CC'D'D$ es igual aproximadamente [2] a hCC':

---

[1] Hablando de la proximidad de un arco nuevo al arco de la circunferencia, suponemos que los puntos del arco nuevo son próximos a los puntos del arco dado y la curvatura del arco nuevo es próxima a la del arco dado.

[2] La igualdad aproximada se entiende en el sentido de la equivalencia.

$$\text{área } CC'D'D \approx h \cdot CC'. \qquad (1)$$

Observemos que sobre arco CD actúa una fuerza dirigida por el radio e igual a $\frac{Th}{R}$, donde R es el radio de nuestra circunferencia. El trabajo que realizamos desplazando el arco CD hasta que coincida con $C'D'$, es igual a la fuerza $\frac{Th}{R}$, multiplicada por

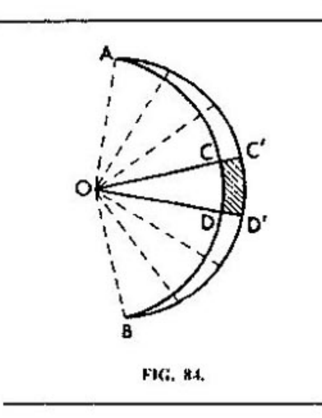


FIG. 84.

el camino recorrido CC', es decir, a $\frac{Th}{R} CC'$ o (véase (1))

$$\frac{Th}{R} CC' = \frac{T}{R} \text{ (área } CC'D'D). \qquad (2)$$

De este modo, *el trabajo que se necesita para desplazar un arco pequeño CD en una nueva y próxima posición $C'D'$, es igual (equivalente, con mayor precisión) a $\frac{T}{R}$, multiplicada por el área $CC'D'D$ que cubre este arco durante su desplazamiento.*

Designemos con ΔF el área encerrada entre los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\underset{\smile}{AB}$. Dividiremos esta área en plazoletas pequeñas (análogas a la plazoleta $CC'D'D$) mediante los radios que tienen por origen el centro O. En este procedimiento también el arco AB se dividirá en arcos pequeños. Cada tal arco CD cubrirá en su desplazamiento una

plazoleta correspondiente $CC'D'D$ (encerrada entre este arco, el arco $C'D'$ y los segmentos de los radios CC' y DD'). El trabajo que se necesita realizar en este desplazamiento es igual a $\frac{T}{R}$, multiplicada por el área descrita por este arco. El trabajo total que se realiza en el desplazamiento de todo el arco $\overset{\frown}{AB}$ en la posición $\underset{\smile}{AB}$, es igual a la suma de estos trabajos, es decir, a $\frac{T}{R}$ multiplicada por la suma de estas plazoletas pequeñas, o sea, a $\frac{T}{R}\Delta F$, donde ΔF es el área cubierta por el arco $\overset{\frown}{AB}$ en su desplazamiento.

Pero el trabajo realizado equivale al incremento de la energía potencial ΔV durante la transformación del arco $\overset{\frown}{AB}$ en el arco $\underset{\smile}{AB}$:

$$\Delta V \approx \frac{T}{R}\Delta F. \tag{3}$$

Por otra parte, de la fórmula (2) § 9 se deduce:

$$\Delta V = T\Delta l, \tag{4}$$

donde Δl es el incremento de la longitud.

Al comparar las expresiones (3) y (4), obtenemos:

$$\frac{T}{R}\Delta F \approx T\Delta l$$

ó

$$\Delta l = \frac{1}{R}\Delta F. \tag{5}$$

El incremento Δl en la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ es igual (equivalente, con más precisión) a la curvatura $\frac{1}{R}$, multiplicada por área encerrada entre los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\underset{\smile}{AB}$[1].

2. VARIACIÓN DE LA LONGITUD DEL ARCO DE UNA CURVA ARBITRARIA. Si en lugar de una circunferencia tomamos una curva arbitraria, el arco pequeño $\overset{\frown}{AB}$ de esta última puede considerarse como un

[1] Todas las igualdades se realizan salvo un infinitésimo del orden superior en comparación con Δl.

arco de la circunferencia de radio R (R es el radio de curvatura) y la fórmula (5) queda válida, si por $\frac{1}{R}$ se entiende la curvatura de la curva en un punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$.

Un fenómeno sumamente análogo tiene lugar para las curvas dispuestas en una superficie, mas en vez de la curvatura figura

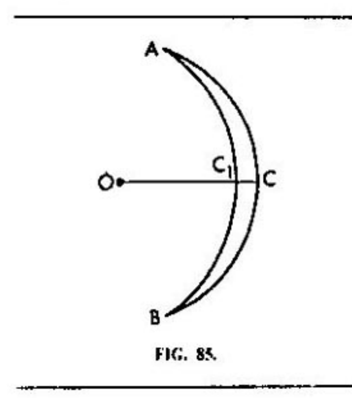


FIG. 85.

por doquier la curvatura geodésica. La fórmula (5) adquirirá la forma

$$\Delta l = \Gamma \Delta F \tag{6}$$

donde Γ es la curvatura geodésica, Δl es el incremento de longitud del arco de la curva, al cambiarlo por un arco próximo en la misma superficie, y ΔF es es área dispuesta entre los arcos original y nuevo.

En la fig. 84 está señalada el área ΔF que se dispone *fuera* del círculo cuyo arco es $\overset{\frown}{AB}$. En la fig. 85 el área está *dentro* del círculo. En este último caso vamos a considerar el área ΔF negativa. El incremento Δl de la longitud del arco es también negativo (puesto que se trata aquí no de un alargamiento sino de la reducción del arco).

3. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO. Consideraremos un problema siguiente. *Hállese entre todas las curvas cerradas que limitan el área del valor dado F aquella curva que tiene longitud mínima.*

Suponemos que tal curva existe. Demostremos que es una circunferencia.

Observemos que una curva de curvatura constante $\left(\text{es decir, una curva que en todos los puntos tiene igual curvatura } \frac{1}{R}\right)$ es la circunferencia.

La demostración que sigue no pretende ser muy rígida. El arco muy pequeño de una curva de constante curvatura $\frac{1}{R}$ puede considerarse como arco de una circunferencia de radio R. Convengamos en considerar toda la curva como curva compuesta de un gran número de tales arcos pequeños con la particularidad de que dos arcos vecinos se superponen parcialmente. Dos arcos pequeños de la circunferencia de un mismo radio, que se superponen parcialmente, forman un arco nuevo del mismo radio. De este modo, cada par de arcos pequeños contiguos en los cuales está dividida nuestra curva; forma el arco de una circunferencia de radio R. Continuando estos razonamientos nos convenceremos de que cada 3, 4, 5, etc., arcos pequeños sucesivos forman el arco de una circunferencia de radio R, y, por consiguiente, toda la curva forma el arco de la circunferencia de radio R. Si tenemos una curva cerrada de curvatura constante R, ella es sencillamente una circunferencia de radio R.

Sea q una curva cerrada cuya longitud es la menor de todas las curvas que limitan el área dada F. Suponemos que esta curva no es una circunferencia, es decir, su curvatura no es igual en todos los puntos.

Suponemos, por ejemplo, que en los puntos A y B de esta curva (fig. 86) la curvatura es distinta y constituye, respectivamente,

$$\frac{1}{R_1} \text{ y } \frac{1}{R_2},$$

donde

$$R_1 \neq R_2.$$

Para concretar pongamos

$$\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2}.$$

Examinemos dos arcos pequeños $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{C_1D_1}$, de nuestra curva q, que contienen los puntos A y B. Sustituyamos el arco $\overset{\frown}{CD}$ por

el arco próximo $\widehat{CA'D}$, y el arco C_1D_1, por el arco próximo $\widehat{C_1B'D_1}$. Designemos con ΔF_1 el área limitada por $\widehat{CD}$ y $CA'D$, y con ΔF_2, el área limitada por $\widehat{C_1D_1}$ y $\widehat{C_1B'D_1}$. En virtud de la fórmula (5), como resultado de la sustitución del arco $\widehat{CD}$ por el arco $\widehat{CA'D}$, la longitud de la curva q adquiere un incremento, igual (equivalente, con mayor precisión) a $\frac{1}{R_1}\Delta F_1$. La longitud de la curva q

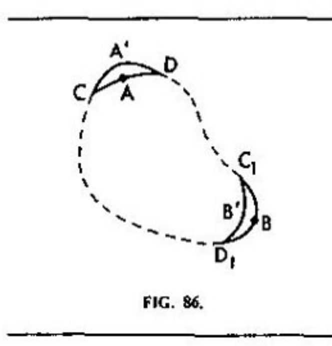


FIG. 86.

obtendrá también el incremento igual a $\frac{1}{R_2}\Delta F_2$, como resultado de la sustitución del arco $\widehat{C_1D_1}$ por el arco $\widehat{C_1B'D_1}$. El incremento total del área limitada por q es $\Delta F_1 + \Delta F_2$, y el incremento de la longitud es igual (equivalente) a

$$\frac{1}{R_1}\Delta F_1 + \frac{1}{R_2}\Delta F_2.$$

Elijamos ahora los arcos $\widehat{CA'D}$ y $\widehat{C_1B'D_1}$ de un modo tal que ΔF_1 y ΔF_2 sean iguales en valor absoluto y tengan signos opuestos, con la particularidad de que $\Delta F_1 > 0$, y $\Delta F_2 = -\Delta F_1 < 0$. En este caso el incremento del área $\Delta F_1 + \Delta F_2 = 0$, es decir, el área queda invariable, al cambiarse la curva q. En cambio, el incremento de la longitud q es igual (equivalente, para mayor presición) a

$$\Delta F_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

y como

$$\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2},$$

entonces

$$\Delta F_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) < 0.$$

Así pues, el incremento de la longitud de q es negativo. La curva q pasó en otra curva q_1 de menor longitud que limita la misma área. Esto significa que q no es una curva de menor longitud entre las curvas que limitan el área dada.

De aquí viene la deducción: *la curva de una longitud mínima entre aquellas curvas que limitan el área dada es una circunferencia*[1].

4. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EN UNA SUPERFICIE. Los problemas análogos pueden considerarse también en una superficie, mas el papel de la curvatura lo desempeña siempre la curvatura geodésica $\Gamma = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{R}$. Por ejemplo, si un arco menor $\overset{\frown}{CD}$ de la curva q, cuya curvatura geodésica $\Gamma = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{R}$, es sustituida por un arco próximo $\overset{\frown}{CA'D}$, siendo el área encerrada entre $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{CA'D}$ igual a ΔF, el incremento en longitud Δl que adquiere la curva, al sustituirse $\overset{\frown}{CD}$ por el arco $\overset{\frown}{CA'D}$, tendrá la forma

$$\Delta l = \Delta F \frac{\operatorname{sen} \varphi}{R} = \Gamma \Delta F.$$

Repitiendo la demostración del teorema anterior en la que la curvatura siempre se reemplaza por la curvatura geodésica, obtendremos un teorema siguiente.

Entre todas las curvas cerradas en una superficie que limitan el área dada, la menor longitud la tiende la curva de la curvatura

[1] Toda una serie de otras demostraciones de las propiedades isoperimétricas de una circunferencia se citan en el libro de D. A. Kryshanovski "*Isoperímetros, propiedades máximas y mínimas de las figuras geométricas en la exposición popular*", M.—L., ОНТИ, 1938; véase también L. A. Liustérnik "*Cuerpos convexos*", Gostejizdat, 1941.

geodésica constante (en la superficie de una bola estas líneas están representadas por los círculos mayores y menores).

OBSERVACIÓN. Igual que en un plano en la superficie de una bola una curva de la curvatura geodésica constante es la circunferencia geodésica.

En otras superficies las curvas de curvatura geodésica constante no son, en general, circunferencias geodésicas.

CAPÍTULO VI. PRINCIPIO DE FERMAT Y SUS COROLARIOS

§ 16. PRINCIPIO DE FERMAT

1. PRINCIPIO DE FERMAT. A los problemas examinados les son muy próximos los problemas de la óptica geométrica relacionados con el así llamado *principio de Fermat*.

Examinamos un medio óptico plano, en cada punto del cual $A(x, y)$ está determinada la velocidad de la luz $v = v(x, y) = v(A)$. El medio se llama *homogéneo*, si la velocidad de la luz es la misma en todos los puntos del medio.

El tiempo $T(q)$ durante el cual es pasada la curva q a la velocidad de la luz, se denomina *longitud óptica de la curva* q.

En un medio óptico homogéneo en el cual la velocidad de la luz es v, la longitud óptica $T(q)$ de la curva q es proporcional a la longitud común de ésta $l(q)$ y es igual a

$$T(q) = \frac{1}{v} l(q).$$

PRINCIPIO DE FERMAT *En un medio óptico el trayecto de la luz del punto A al punto B es una línea de longitud óptica mínima entre todas las líneas que unen A y B.*

De aquí proviene que en un medio óptico homogéneo *la luz se propaga por líneas rectas.*

2. LEY DE REFLEXIÓN. En un medio optico homogéneo está dada la curva s (fig. 87) que refleja los rayos luminosos (un espejo). Es menester hallar la línea q_0, por la cual la luz va del punto A al punto B, reflejándose de la curva s. La línea q_0 es la más corta de todas las líneas q que unen A y B y se reflejan de s. Quiere decir, esta línea (véase § 9) es la quebrada ACB con vértice C en la línea s, con la particularidad de que la bisectriz CD del ángulo ACB es normal a la curva s en el punto C.

Los ángulos $\alpha = ACD$ y $\beta = DCB$, que los rayos AC y CB forman con la normal CD se llaman *ángula de incidencia y ángulo de reflexión*. Llegamos así **a la ley de reflexión de la luz de Descartes:** *el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.*

De las propiedades de las normales a una elipse y una parábola, obtenidas en el § 9, se deduce:

Si la curva s tiene forma de una elipse, los rayos que salen del

foco F de esta elipse se reúnen, al ser reflejados, en otro foco (fig. 88).

Si la curva s tiene forma de una parábola, los rayos que salen del foco de la parábola y se reflejan de ella, se transforman en los rayos paralelos al eje de la parábola, y viceversa, los rayos paralelos al eje de la parábola se reúnen, siendo reflejados, en el foco de la parábola (fig. 89).

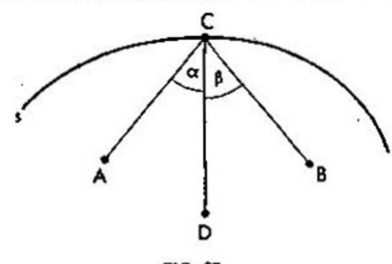


FIG. 87.

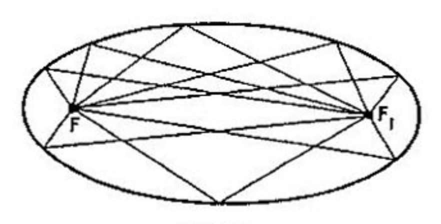


FIG. 88.

En esta propiedad de la parábola está basado el empleo de los espejos en forma de un paraboloide (superficie engendrada por la revolución de una parábola alrededor del eje) en los proyectores, telescopios de reflexión (reflectores), etc.

3. LEY DE REFRACCIÓN. Consideraremos dos medios ópticos homogéneos I y II, separados por una curva s (véase la fig. 81); la velocidad de la luz es v_1 en el medio I, y v_2, en el medio II. Hállese el trayecto de la luz $q_0 \doteq \overset{\frown}{AB}$ que parte del punto A del medio I y va al punto B del medio II.

Vamos a examinar toda una serie de las líneas q, que unen A y B y que se componen de los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$, dispuestos, en

los medios I y II, respectivamente, donde C es el punto de s. La longitud óptica $T(q)$ de la curva q es

$$T(q) = T(\widehat{AC}) + T(\widehat{CB}) = \frac{l(\widehat{AC})}{v_1} + \frac{l(\widehat{CB})}{v_2}. \qquad (1)$$

La línea q_0 es una línea de longitud óptica mínima entre todas las curvas q.

Examinemos también un hilo flexible no homogéneo q que está sujeto en los puntos A y B, mientras que su punto intermedio C desliza por la curva s, con la particularidad de que la tensión

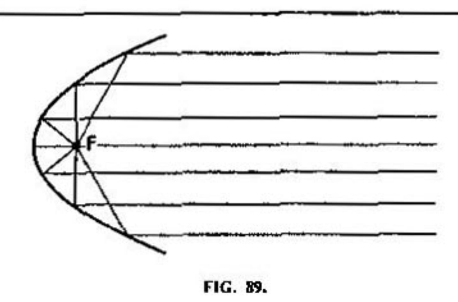


FIG. 89.

en la parte AC de la curva q es igual a $T_1 = \frac{1}{v_1}$, y en la parte CB, a $T_2 = \frac{1}{v_2}$.

En virtud de (2) del § 13 la energía potencial $V(q)$ es

$$V(q) = \frac{l(\widehat{AC})}{v_1} + \frac{l(\widehat{CB})}{v_2}. \qquad (2)$$

Comparando las fórmulas (1) y (2), obtenemos:

$$T(q) = V(q).$$

La energía potencial del hilo q coincide con su longitud óptica. Quiere decir, que q_0 es una línea de longitud óptica mínima entre las curvas q, es también una línea de energía potencial mínima entre las mismas curvas q.

En virtud de (4) del § 13 q_0 es una quebrada AC_0B. Sean α y β los ángulos formados por los segmentos AC_0 y C_0B con

la tangente LL_1 a la curva s en el punto C_0. De la fórmula (4) del § 13 proviene:

$$\frac{\cos\alpha}{v_1}=\frac{\cos\beta}{v_2}. \qquad (3)$$

En esto precisamente consiste *la ley de refracción de la luz*. Sean α_1 y β_1 los ángulos que hacen rectos los ángulos α y β, es decir, los ángulos que forman los segmentos AC_0 y C_0B con la normal a s en el punto C_0. El ángulo α_1 se llama *ángulo de incidencia*; β_1, *ángulo de reflexión*. La fórmula (3) tomará la forma:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1}=\frac{\operatorname{sen}\beta_1}{v_2}.$$

§ 17. CURVA DE REFRACCIÓN

1. CASO ELEMENTAL. Supongamos que el plano está dividido por unas rectas paralelas al eje x en las bandas, en cada una de las cuales la velocidad de la luz es constante (fig. 90). Elijamos los puntos A y B dispuestos en diferentes bandas. La banda M_0 contiene el punto A, la banda M_n contiene el punto B. Entre ellas se disponen en orden sucesivo las bandas $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. La velocidad de la luz en la banda M_0 es igual a v_0, en la banda M_1 es igual a $v_1, \ldots$, en la banda M_n es igual a v_n. Un rayo luminoso que va del punto A al punto B tiene forma de una quebrada $AC_1C_2 \ldots C_nB$, cuyos vértices se ubican en las lineas de separación de las bandas. Designemos con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ los ángulos formados, respectivamente, por los eslabones $AC_1, C_1C_2, C_2C_3, \ldots, C_{n-2}C_{n-1}, C_{n-1}C_n, C_nB$ de esta quebrada con las rectas paralelas al eje x. En el punto C_1 se cumple la correlación

$$\frac{\cos\alpha_0}{v_0}=\frac{\cos\alpha_1}{v_1}$$

(en virtud de la ley de refracción); en el punto C_2 se realiza:

$$\frac{\cos\alpha_1}{v_1}=\frac{\cos\alpha_2}{v_2},$$

etc., y por fin, en el punto C_n:

$$\frac{\cos\alpha_{n-1}}{v_{n-1}}\;\frac{\cos\alpha_n}{v_n}.$$

De aquí se infiere:

$$\frac{\cos \alpha_0}{v_0} = \frac{\cos \alpha_1}{v_1} = \frac{\cos \alpha_2}{v_2} = \ldots = \frac{\cos \alpha_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\cos \alpha_n}{v_n}. \quad (1)$$

Designemos con c el valor general de todas estas relaciones. Entonces podemos escribir

$$\frac{\cos \alpha}{v} = c, \quad (2)$$

donde α es el ángulo de inclinación de cierto eslabón de la

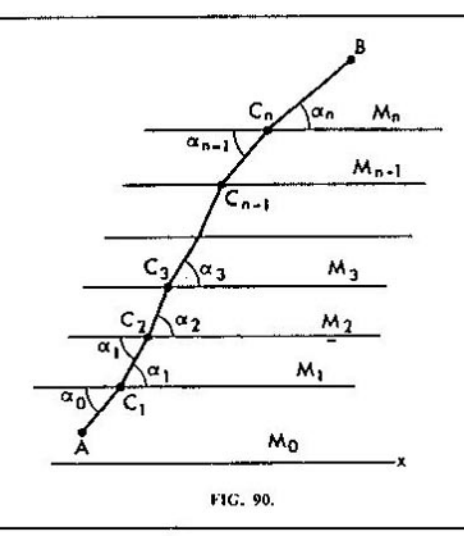


FIG. 90.

quebrada respecto al eje x, y v, velocidad de la luz a lo largo de este eslabón.

Una tangente a la quebrada en un punto de alguno de sus eslabones es una recta en la que se dispone este eslabón. Se puede, por ello, considerar que α en la ecuación significa un ángulo formado por la tangente en el punto de la quebrada con el sentido positivo del eje x, y v es la velocidad de la luz en el mismo punto.

2. CURVA DE REFRACCIÓN. Examinemos un medio óptico en el cual la velocidad de la luz es una función de la ordenada

$$v = v(y),$$

siendo v una función continua de y. *El trayecto de la luz q en tal medio es una línea a lo largo de la cual*

$$\frac{\cos\alpha}{v} = c, \tag{3}$$

donde v es la velocidad de la luz en un punto arbitrario C de la curva q (fig. 91), α es el ángulo formado por la tangente a q en el punto C y el sentido positivo del eje x, c es una constante (que no depende de la elección del punto C en la curva).

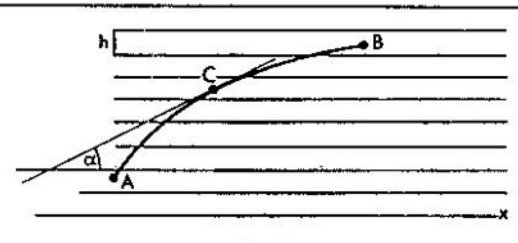


FIG. 91.

Para justificar la ecuación (3) cambiemos algo la distribución de las velocidades de la luz en el medio, a saber, dividámoslo en bandas estrechas de anchura h y convengamos en considerar constante la velocidad de la luz dentro de cada banda, igual, por ejemplo, a la velocidad de la luz en el centro de la banda dada (fig. 91). En este caso el trayecto de la luz del punto A al punto B será, en virtud de lo expuesto anteriormente, una quebrada $(AB)_h$ con vértices en las líneas de separación de las bandas, con la particularidad de que para la quebrada $(AB)_h$ se cumple (en virtud de lo anterior) la ecuación (3). Hemos cambiado algo la distribución de velocidades, pero el cambio será tanto menor cuanto más estrechas sean nuestras bandas.

En límite, cuando la anchura de las bandas h tiende a cero, obtenemos la distribución continua original de velocidades de la luz. En este caso, las quebradas $(AB)_h$ tienden a la curva q, para la cual también se cumplirá la ecuación (3).

3. MODELO DE POINCARÉ DE LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI. El semiplano superior, limitado por el eje x, lo consideramos como un medio óptico en el cual la velocidad de la luz en cualquier punto es igual a la ordenada de éste:

$$v = y.$$

Los rayos de la luz en este medio serán representados por unas semicircunferencias cuyos centros se encuentran en los puntos del eje x (fig. 92).

En efecto, examinemos tal semicircunferencia q con centro en el punto O del eje x. Supongamos que su ordenada en el punto A es y, el ángulo ACO formado por la tangente en este punto y el

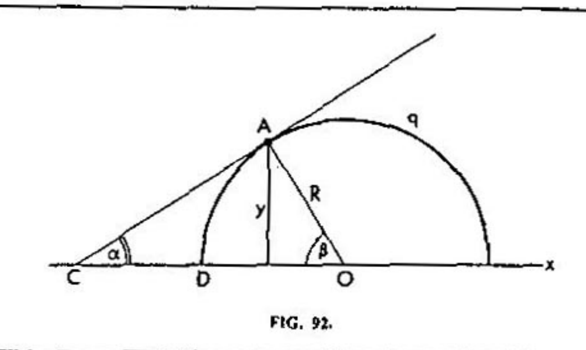


FIG. 92.

eje x es igual a α. Si R es el radio de esta circunferencia, entonces

$$y = R \operatorname{sen} \beta,$$

donde

$$\beta = \angle AOC = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

ó

$$y = R \cos \alpha,$$

es decir,

$$\frac{\cos \alpha}{y} = R.$$

De este modo, la semicircunferencia q satisface a la ecuación (3), es decir, a la ecuación del rayo de la luz en nuestro medio. A medida que y se aproxime al eje, la velocidad tiende a cero.

Se puede señalar que la parte AD de la semicircunferencia q, un extremo de la cual se dispone en el eje x, tiene longitud

óptica infinita. Por esta razón, los puntos del eje x llamaremos puntos "*infinitamente alejados*".

Tomaremos por "*rectas*" las semicircunferencias con el centro en el eje y por "*longitudes*", las longitudes ópticas de los arcos de tales semicircunferencias; los *ángulos* formados por estas rectas serán los ángulos en el punto de su intersección (ángulos formados por sus tangentes).

Obtenemos la geometría plana para la cual conservan su validez muchos postulados de la geometría común. Así, por ejemplo, por dos puntos se puede trazar una y sólo una "recta" (por dos puntos

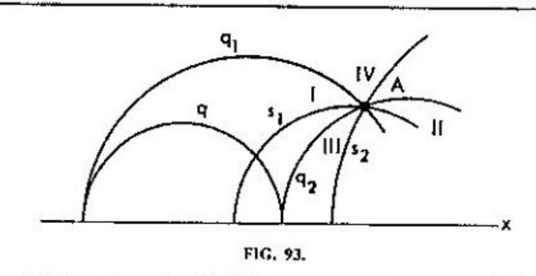


FIG. 93.

en un semiplano se puede trazar sólo una semicircunferencia con el centro en el eje x). El "segmento" tiene una "longitud" mínima entre todas las líneas que unen sus extremos. Por "*paralelas*" se toman, naturalmente, dos rectas que tienen un "punto" común "infinitamente alejado" (es decir, dos semicircunferencias que se tocan en el eje x en el cual se encuentran sus centros). Por un punto dado A, que no se dispone en la "recta" q, pueden trazarse dos "rectas" q_1 y q_2, paralelas a q (fig. 93). Estas rectas dividen las semicircunferencias en cuatro "ángulos" de vértice A. Las rectas s_1, que pasan por A y se encuentran en el primer par de los ángulos verticales I y II, cortan la "recta" q. En cambio, las rectas s_2, dispuestas en los ángulos III y IV, no cortan q.

Hemos obtenido una realización de la geometría de Lobachevski en el plano, el así llamado modelo de Poincaré de esta geometría.

En el libro de B. N. Delone ("Exposición breve de la demostración de la no-contradicción de la planimetría de Lobachevski", edición de la Academia de ciencias de la URSS, 1953) se da un estudio detallado de este modelo.

§ 18. PROBLEMA DE LA BRAQUISTOCRONA

1. CICLOIDE. Supongamos que una circunferencia K de radio R rueda sobre una recta LL_1 que tomemos por el eje x (fig. 94). El movimiento de la circunferencia se compone de dos movimientos: 1) la revolución alrededor del centro O con la velocidad angular ω; en este movimiento la velocidad lineal de los puntos de la circunferencia es igual a $v = R\omega$; 2) el movimiento de avance paralelamente al eje x con la misma velocidad v. El punto A

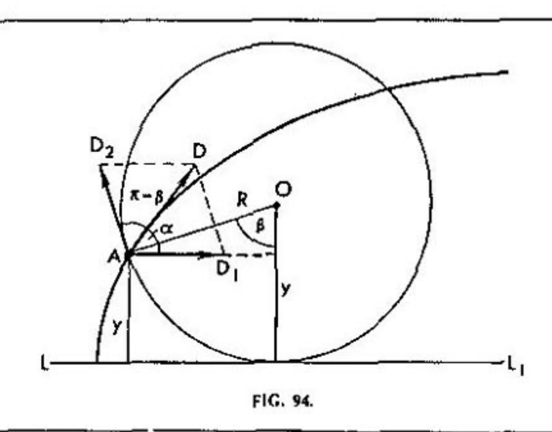


FIG. 94.

de la circunferencia describe en este caso una línea llamada *cicloide.*

Supongamos que en un momento $t = 0$ el punto A se encontraba en el eje x (véase la fig. 94). Para el momento t la circunferencia gira un ángulo $\beta = t\omega$. La ordenada y del punto A en este momento es

$$y = R(1 - \cos\beta) = 2R \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}. \tag{1}$$

Hallemos la dirección de velocidad del punto A en este momento. Esta será la dirección de la tangente a la cicloide.

La velocidad $T_1 = AD_1$ del movimiento de avance es igual a v y está dirigida paralelamente al eje x. La velocidad $T_2 = AD_2$

del movimiento por la circunferencia también es igual a v y está dirigida por la tangente a la circunferencia. El ángulo D_1AD_2 es igual a $(\pi - \beta)$. Al sumar estas velocidades rigiéndose por la regla de paralelogramo, hallaremos la velocidad del movimiento del punto A por la cicloide. Ella está dirigida por la bisectriz del ángulo D_1AD_2 y forma con la dirección del eje x un ángulo (véase la fig. 91)

$$\frac{1}{2}(\pi - \beta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Así pues, el ángulo α formado por la tangente a la cicloide en el punto A y el eje x es

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Por esto

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}. \tag{2}$$

De las fórmulas (1) y (2) se deduce:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{y}{2R}}$$

ó

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}} = c. \tag{3}$$

La ecuación (3) establece una relación entre el ángulo α, formado por la tangente a la cicloide en su punto A y la ordenada y de este punto. Viceversa, una curva que satisface a esta ecuación es una cicloide.

2. PROBLEMA DE BRAQUISTOCRONA. Sean A y B dos puntos (se supone que A es superior a B (fig. 95)). Unamos los puntos A y B con la línea q; un punto, desplazándose de A a B a lo largo de q sin velocidad inicial por la fuerza de gravitación, pasará la curva q durante un lapso llamado *tiempo de caída por la curva q*.

Hállese una curva q de caída más rápida (la *braquistocrona*, una palabra griega) que une los puntos A y B, es decir, es necesario hallar una curva para la cual el tiempo de caída de A a B es mínimo.

En un plano vertical que contiene los puntos A y B, tomemos por el eje x una recta horizontal en la que está dispuesto el punto A; el eje y lo orientamos verticalmente abajo. La velocidad v de un punto, accionado por la fuerza de gravitación sin velocidad inicial, y la ordenada y de este punto están entrelazadas por la correlación:

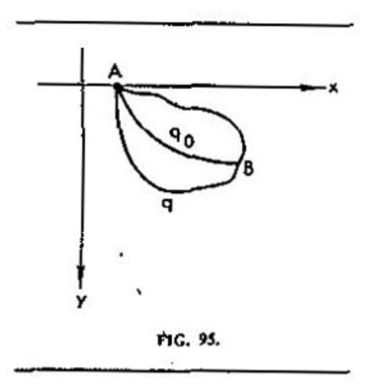


FIG. 95.

$$v^2 = 2gy$$

ó

$$v = \sqrt{2g}\sqrt{y}. \tag{4}$$

Imaginémonos un medio óptico en el cual la velocidad de la luz v se determina por la fórmula (4); la longitud óptica de la curva q coincide con el tiempo de caída a lo largo de esta curva. El trayecto de la luz q_0 del punto A al punto B es una curva de la mínima longitud óptica entre las curvas que unen A y B; por esta razón, q_0 coincide con la braquistocrona.

Para la línea q_0 se verifica la igualdad (véase (3) del § 17)

$$\frac{\cos\alpha}{v} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2g}\sqrt{y}} = c \text{ (} c \text{ es una constante)}$$

ó

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}} = c_1 \ (c_1 = c\sqrt{2g}).$$

De aquí, en virtud de las propiedades de una cicloide mencionadas

arriba (véase la fórmula (3)), *la braquistocrona es un arco de la cicloide.*

§ 19. CATENARIA Y PROBLEMA DE LA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN MÍNIMA

1. CATENARIA. Una cadena homogénea pesada (o un hilo no elástico) fijada en dos puntos A y B, se dispone, bajo el efecto de la gravitación, en la posición de equilibrio a lo largo de una curva que se denomina *catenaria* (fig. 96). (La homogeneidad de la cadena significa que su densidad ρ es constante; cualquier tramo de la cadena de longitud h tiene masa ρh).

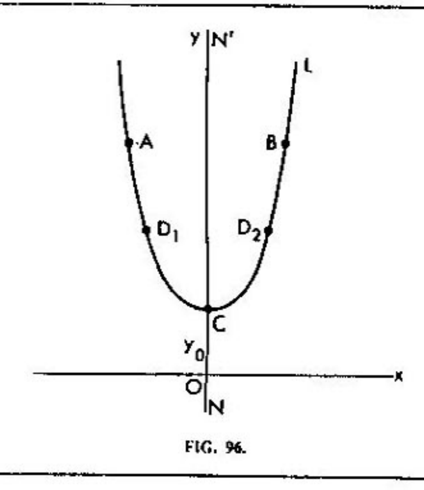


FIG. 96.

Si la cadena $\widehat{AB}$ la fijamos adicionalmente en los puntos D_1 y D_2, la posición de equilibrio de la parte $\widehat{D_1D_2}$ no se alterará. La catenaria $\widehat{AB}$ es una prolongación de la catenaria $\widehat{D_1D_2}$. Se puede considerar que una catenaria se extiende ilimitadamente en ambos lados, que la linea $\widehat{AB}$ es una parte *de la catenaria ilimitada.*

Se llama *vértice* de la catenaria al punto C que ocupa la posición inferior. Una catenaria ilimitada es simétrica respecto del eje vertical NN' que pasa por el vértice. Tomemos este eje por el eje y.

Examinemos la parte derecha $\overset{\frown}{CL}$ de la catenaria. Mediante y designaremos la ordenada de cierto punto D de la catenaria (fig. 97), mediante α un ángulo formado por la tangente en este punto y el eje x, mediante s, la longitud del arco $\overset{\frown}{CD}$ de la catenaria.

Fijemos la catenaria en los puntos C y D. La fuerza que actúa sobre el punto D, se llama *tensión* P de la catenaria en el punto D

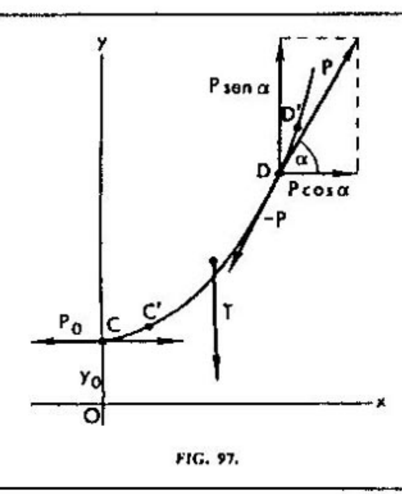


FIG. 97.

y está dirigida a lo largo de la tangente a la catenaria en el punto D (fig. 97). La fuerza P_0, que actúa sobre el punto C, está dirigida por la tangente a la catenaria en este punto, es decir, es paralela al eje x (además, está dirigida a la izquierda).

La resultante T de las fuerzas de gravitación que actúan sobre el tramo $\overset{\frown}{CD}$ de la cadena, está dirigida paralelamente al eje y hacia abajo; la masa del tramo $\overset{\frown}{CD}$ de longitud s es igual a $s\rho$. De aquí, el valor de T es

$$T = g\rho s, \tag{1}$$

donde g es la constante de gravitación. La fuerza P tiene una componente vertical dirigida hacia arriba e igual a

$$P \operatorname{sen} \alpha,$$

y una componente horizontal dirigida a la derecha e igual a

$$P \cos \alpha,$$

Si una catenaria se endurece, quedará equiponderante. Las fuerzas horizontales P_0 y $P \cos \alpha$ y las verticales T y $P \operatorname{sen} \alpha$, que actúan en la catenaria y están dirigidas en las direcciones opuestas, se ponen en equilibrio, de donde, en virtud de (1),

$$P \operatorname{sen} \alpha = g \rho s, \tag{2}$$

$$P \cos \alpha = P_0. \tag{3}$$

Supongamos ahora que la cadena se desplaza por nuestra catenaria de un modo tal que todo su punto describe un arco pequeño de longitud h. En este procedimiento la cadena pasará en la posición $C'D'$. Hallemos el trabajo que se debe gastar para realizar este desplazamiento de la cadena.

La fuerza P, aplicada en el punto D, realizará el trabajo igual a Ph; la fuerza P_0 en el punto D, igual a $P_0 h$. El trabajo total gastado para desplazar la cadena es

$$R = (P - P_0) h. \tag{4}$$

En la posición original la cadena $\overset{\frown}{CD}$ se compone del tramo $\overset{\frown}{C'D}$ y un tramo pequeño adicional $\overset{\frown}{CC'}$. En la posición nueva $\overset{\frown}{C'D'}$ la cadena está compuesta por el mismo tramo $\overset{\frown}{C'D}$ y un tramo adicional $\overset{\frown}{DD'}$. Ambos tramos adicionales $\overset{\frown}{CC'}$ y $\overset{\frown}{DD'}$ tienen igual longitud h e iguales masas ρh; mas el tramo $\overset{\frown}{CC'}$ tenía la ordenada vertical y_0, mientras que la ordenada de $\overset{\frown}{DD'}$ es y. Como resultado del trabajo realizado, en lugar del tramo adicional de ordenada y_0 ha aparecido un tramo de la misma masa con la ordenada y. De aquí se deduce que el trabajo realizado es

$$R = g \rho h (y - y_0). \tag{5}$$

De (4) y (5) se infiere:

$$P - P_0 = g \rho (y - y_0)$$

ó

$$P - g\rho y = P_0 - g\rho y_0. \qquad (6)$$

Al desplazar la cadena paralelamente a ella misma en la dirección del eje y, la forma de la cadena no se alterará como tampoco variará la reacción P en unos ciertos puntos. Desplazaremos la catenaria en la dirección del eje. y de tal manera que su ordenada original y_0 se haga igual a

$$y_0 = \frac{1}{g\rho} P_0. \qquad (7)$$

Una posición de este género de la catenaria se llama *estándar*. Más abajo daremos la definición geométrica de la posición estándar de la catenaria.

En esta posición la ecuación (6) se simplifica y toma la forma

$$P - \rho g y = 0$$

ó

$$y = \frac{1}{\rho g} P. \qquad (8)$$

La tensión en cualquier punto de una catenaria en la posición estándar es proporcional a su ordenada.

De (3) se deduce

$$\frac{1}{\rho g} P \cos \alpha = \frac{1}{\rho g} P_0$$

o, si se emplean las igualdades (7) y (8):

$$y \cos \alpha = y_0. \qquad (9)$$

La ecuación (9) liga la ordenada de un punto de la catenaria con el ángulo α formado por la tangente en dicho punto y el eje x.

Comparando la ecuación (9) con la ecuación de la línea de refracción (véase (3) del § 17), obtenemos:

Una catenaria en la posición estándar es la forma que toma un rayo en el medio en el cual la velocidad de la luz v es inversamente proporcional a la ordenada y:

$$v = \frac{c}{y}.$$

2. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE LA POSICIÓN ESTÁNDAR DE UNA CATENARIA. De las igualdades (2) y (8) se deduce:

$$\frac{1}{\rho g} P \operatorname{sen} \alpha = s,$$

luego

$$s = y \operatorname{sen} \alpha.$$

De aquí

$$y - s = y(1 - \operatorname{sen} \alpha).$$

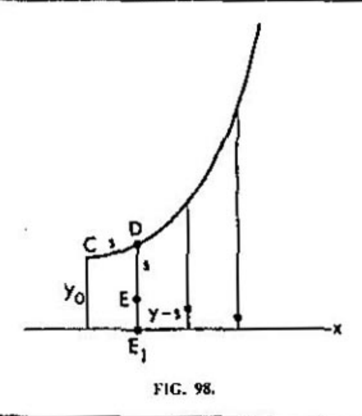


FIG. 98.

Por fin, en virtud de (9) obtenemos:

$$y - s = y_0 \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Introduzcamos la designación $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (β es el ángulo formado por una tangente a la catenaria y el eje y). Obtenemos:

$$y - s = y_0 \frac{1 - \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = y_0 \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}} = y_0 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}. \qquad (10)$$

Examinemos el segmento DE que es paralelo al eje y, está dirigido hacia abajo y es igual a la longitud s (longitud del arco

$\overset{\frown}{CD}$ de la catenaria) (fig. 98). Si mantenemos al arco $\overset{\frown}{CD}$ sujeto en el punto D, dejando en libertad el punto C, entonces, el arco $\overset{\frown}{CD}$, accionado por la fuerza de gravitación, pasará en la nueva posición de equilibrio, esto es, en el segmento vertical DE. En breves palabras diremos: el arco $\overset{\frown}{CD}$ de la cadena "caera" en la posición DE. El segmento EE_1 de la línea vertical, igual a $y-s$, señala cuánto el extremo E de la parte "caída" de la cadena dista del eje x.

De la fórmula (9) proviene:

$$\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = \frac{y_0}{y}. \tag{11}$$

Supongamos que el punto D se va ilimitadamente por la catenaria hacia arriba. Su ordenada tenderá al infinito:

$$y \to \infty.$$

Entonces, en virtud de (11) $\operatorname{sen}\beta$ tiende a cero. Mas, en este caso también $\beta \to 0$ (el ángulo β formado por la tangente en el punto D y el eje y tiende a cero). Además, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \to 0$, y en virtud de (10)

$$\lim_{y\to\infty} (y - s) = 0.$$

La distancia medida del extremo E del arco caido $\overset{\frown}{CD}$ hasta el eje x tiende a cero, cuando el extremo D de este arco se va a infinito.

El eje x, siendo estándar la posición de la catenaria, es aquella recta horizontal a la cual se aproxima indefinidamente un extremo del arco caído DE, el origen del cual se aleja ilimitadamente.

Por esto precisamente se caracteriza la posición estándar de una catenaria.

3. SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN MÍNIMA. Resolvamos un problema siguiente:

Entre unas curvas planas q, que unen dos puntos dados A y B, hállese aquella curva que, al girarse alrededor del eje x, proporciona la mínima superficie lateral de revolución (fig. 99).

Designemos con $V(q)$ el área de la superficie lateral de revolución de la curva q alrededor del eje x, y con $T(q)$, la longitud óptica de la curva q en un medio en el cual la velocidad de la

luz se determina según la fórmula

$$v = \frac{1}{2\pi y}. \tag{12}$$

Demostremos la igualdad de estas magnitudes:

$$V(q) = T(q)$$

Sea $\widehat{CD}$ un tramo pequeño de la curva q de longitud h.

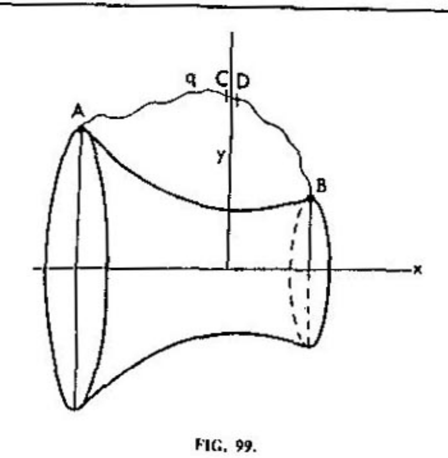


FIG. 99.

Mostremos que

$$V(\widehat{CD}) = T(\widehat{CD}) \tag{13}$$

Tomando $\widehat{CD}$ por un segmento rectilíneo pequeño y designando con y la ordenada del centro de gravedad de $\widehat{CD}$, obtenemos: la superficie lateral de revolución $V(\widehat{CD})$ es igual a la superficie lateral de un cono truncado cuya generatriz es igual a h y el radio de la sección media es y. De aquí

$$V(\widehat{CD}) = 2\pi yh.$$

Por otra parte, si la velocidad de la luz v en el punto medio de este segmento pequeño (y consecuentemente, aproximadamente,

para todo este segmento) es igual a $\frac{1}{2\pi y}$, su longitud óptica $T(\widehat{CD})$ será

$$T(\widehat{CD}) = \frac{h}{\frac{1}{2\pi y}} = 2\pi yh,$$

es decir, llegamos a la igualdad (13).

De la igualdad entre la longitud óptica T y el área de la superficie lateral de revolución V alrededor de un eje, para los tramos pequeños de la curva q se infiere su igualdad para toda la curva q. Por eso, si para la curva q una magnitud $V(q)$ alcanza su valor mínimo, entonces para la misma curva alcanza su valor mínimo la longitud óptica $T(q)$. En virtud del principio de Fermat, la curva q es un rayo luminoso en nuestro medio óptico, por medio del cual se unen los puntos A y B. Mas, en nuestro medio óptico un rayo luminoso tiene forma de una catenaria (en la posición estándar).

Así pues, entre las curvas q que unen los puntos A y B, la mínima superficie lateral de revolución alrededor del eje x $V(q)$, la tiene una catenaria $\widehat{AB}$ (en la posición estándar).

4. SUPERFICIES MÍNIMAS. De un modo análogo a la resolución del problema de las líneas más cortas que unen los puntos dados, se puede levantar la cuestión sobre la superficie mínima tendida en una curva dada (sobre la superficie para la que una curva dada sirve de frontera) o sea, el problema de la así llamada *superficie mínima.*

Si una curva r es plana, un trozo del plano Q, limitado por ella, será la superficie mínima tendida en la curva r.

Si la curva r no es plana, la superficie mínima es distinta de una parte del plano.

En la revolución alrededor del eje x, los puntos A y B forman dos circunferencias r_1 y r_2, dispuestas en los planos perpendiculares a dicho eje que contiene los centros de las circunferencias. Una superficie obtenida como resultado de revolución de la catenaria $\widehat{AB}$, que une estos puntos, es la superficie mínima tendida en las circunferencias r_1 y r_2.

5. PROBLEMA ISOMÉTRICO DE LA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN MÍNIMA. Resolvamos un problema más complejo: *hállese entre todas las curvas que unen los puntos A y B y tienen una longitud dada l, aquella curva que en la revolución alrededor de un eje proporciona*

la mínima superficie lateral. Convengamos en considerar horizontal el eje de revolución LL_1 (fig. 100).

Unamos los puntos A y B con una cadena de longitud dada l_0. Tomemos por el eje x una línea horizontal MM_1 (paralela al eje de revolución LL_1) tal que con respecto a ella la catenaria $\overset{\frown}{AB}$ se encuentre en la posición estándar.

Designemos con $V_1(q)$ una superficie lateral formada por la revolución de la curva q alrededor del eje x (el eje MM_1), con $V(q)$, una superficie formada por la revolución de q alrededor del

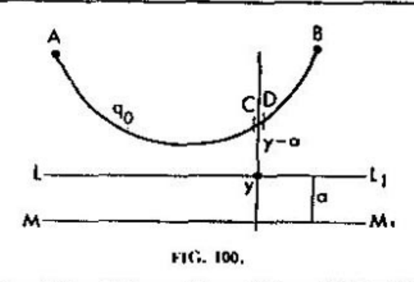


FIG. 100.

eje LL_1; $l(q)$ significa la longitud de la curva q. Si a es la distancia entre los ejes LL_1 y MM_1, entonces

$$V(q) = V_1(q) - 2\pi a l(q). \tag{14}$$

En efecto, sea $\overset{\frown}{CD}$ un pequeño tramo de la curva q de longitud h. Si y es la distancia del centro de $\overset{\frown}{CD}$ hasta el eje MM_1, entonces $y-a$ es su distancia hasta el eje LL_1. La longitud $l(\overset{\frown}{CD}) = h$. Luego,

$$V_1(\overset{\frown}{CD}) = 2\pi hy, \quad V(\overset{\frown}{CD}) = 2\pi h(y-a).$$

Como

$$2\pi h(y-a) = 2\pi hy - 2\pi ah,$$

tenemos

$$V(\overset{\frown}{CD}) = V_1(\overset{\frown}{CD}) - 2\pi a l(\overset{\frown}{CD}). \tag{15}$$

De este modo, la fórmula (14) es válida para cualquier tramo pequeño de la curva q. Quiere decir, es válida también para toda la curva q.

Nos son de interés las curvas $\bar{q}$ de longitud l_0, $l(q_0) = l_0$, que unen los puntos A y B. Para estas curvas

$$V(\bar{q}) = V_1(\bar{q}) - 2\pi l_0 a,$$

es decir, para dichas curvas las magnitudes $V(\bar{q})$ y $V_1(\bar{q})$ se diferencian en una constante $2\pi l_0 a$. Para la misma curva q_0 estas magnitudes alcanzarán, por eso, su valor mínimo. La catenaria q_0, que se encuentra en la posición estándar respecto del eje x, proporciona el valor mínimo $V_1(q)$ de la superficie lateral de revolución alrededor de este eje, entre todas las curvas que unen A y B, en particular, entre las curvas $\bar{q}$ de longitud l_0.

Esto significa que *la misma catenaria q_0 da el mínimo de la magnitud $V_1(\bar{q})$ entre las curvas $\bar{q}$ de longitud l_0, que unen los puntos A y B.*

Esta misma propiedad de la catenaria puede demostrarse de otro modo.

Consideremos un conjunto de las líneas $\bar{q}$ que unen los puntos A y B y tienen una longitud prefijada. Cada tal línea la vamos a tomar por la posición de una cadena pesada homogénea de densidad ρ. La energía potencial de gravitación de la cadena en la posición $\bar{q}$ designemos con $U(\bar{q})$. La magnitud $U(\bar{q})$ alcanza su mínimo para la catenaria $\bar{q} = q_0$.

Efectivamente, en virtud del principio de Dirichlet (véase el § 11), la curva q_0, para la cual $U(\bar{q})$ alcanza su valor mínimo, es la posición de equilibrio de la cadena.

Tomemos por el eje x una recta horizontal MM_1 y hagamos que la densidad ρ sea igual a 2π. Tomemos esta recta por la recta en que $U = 0$. Si y es la ordenada del medio de un tramo pequeño $\overset{\frown}{CD}$ de longitud h de la cadena (fig. 100), entonces

$$U(\overset{\frown}{CD}) = \rho h y = 2\pi h y.$$

Al mismo tiempo, la superficie lateral $V(\overset{\frown}{CD})$ de revolución del mismo arco pequeño $\overset{\frown}{CD}$ alrededor del eje MM_1 (del eje x) es

$$V(\overset{\frown}{CD}) = 2\pi h y.$$

De aquí proviene:

$$U(\overset{\frown}{CD}) = V(\overset{\frown}{CD})$$

y llegamos a la igualdad

$$U(q) = V(q).$$

En efecto, de la igualdad demostrada entre los valores de ambas magnitudes U y V, para cualesquiera partes pequeñas de la curva q se deduce su igualdad para toda la curva q. Por esta razón, una catenaria que da el mínimo valor de la magnitud $U(\bar{q})$ entre todas las curvas $\bar{q}$ de longitud prefijada l que unen los puntos A y B, proporciona el mínimo de los valores para tales curvas también en el caso de la magnitud $V(q)$.

Una magnitud, dependiente de la curva, se denomina funcional. Así, por ejemplo, las magnitudes de tipo $l(q)$, $V(q)$, $T(q)$, $U(q)$, etc., son todas funcionales.

Jakob Bernoulli fue primero en considerar un problema siguiente:

Hállese entre las curvas de longitud prefijada aquella curva para la cual una cierta funcional $J(q)$ alcanza su valor máximo o mínimo. Los problemas de este género los llamó *isoperimétricos*. Un caso particular de este problema, examinado en el § 15, lo llaman, a veces, *problema isoperimétrico en el sentido estricto*. Acabamos de considerar el otro ejemplo del problema isoperimétrico.

§ 20. RELACIÓN ENTRE LA MECÁNICA Y LA ÓPTICA

Examinemos el movimiento de un punto en cierto campo plano (en un medio en que actúan las fuerzas) para el cual es válido el principio de conservación de la energía:

$$U + T = c, \tag{1}$$

donde $U = U(x, y)$ es la energía potencial del punto móvil, T, la energía cinética del punto y c, la energía total (que queda constante durante el movimiento). Suponiendo que la masa del punto es 1, tenemos:

$$T = \frac{w^2}{2},$$

donde w es la velocidad del punto. De aquí y de (1) se deduce

$$w = \sqrt{2T} = \sqrt{2(c - U)} = \sqrt{2[c - U(x, y)]}. \tag{2}$$

Consideraremos toda una serie de trayectos, es decir, los caminos descritos por el punto, siendo prefijado el valor c de la energía total. De la fórmula (2) se ve que w, la velocidad del

punto móvil, se determina enteramente por las coordenadas x, y, es decir, por su posición.

Por ejemplo, realizándose el movimiento en un campo de gravitación $U = gy$, donde g es la constante de gravitación e y es la ordenada dirigida verticalmente arriba, de la fórmula (2) se deduce

$$w = \sqrt{2(c - gy)} = \sqrt{c_1 - c_2 y}\,(c_1 = 2c,\ c_2 = 2g). \tag{3}$$

Consideremos también un medio óptico en el cual la velocidad de la luz v es una magnitud constante, inversa a la velocidad mecánica w:

$$v = v(x, y) = \frac{1}{w(x, y)}. \tag{4}$$

Los rayos luminosos que se propagan en el medio con la velocidad $v = \frac{1}{w}$, *coinciden con las trayectorias del movimiento mecánico de un punto con la velocidad* $w = w(x, y)$.

En esto consiste la analogía entre la mecánica y la óptica, establecida por Hamilton.

Sabemos, por ejemplo, que en un campo de gravitación, en el cual la velocidad de un punto se expresa según la fórmula (3), las trayectorias son parábolas; por esto, los rayos luminosos en el medio óptico con la velocidad de la luz $v = \frac{1}{\sqrt{c_1 - c_2 y}}$ son parábolas.

Sabemos que los rayos luminosos en un medio en el cual las velocidades de la luz v son proporcionales a y, $\frac{1}{y}$, $\sqrt{y}$, son las semicircunferencias con centro en el eje x, catenarias, cicloides, respectivamente. Estas mismas líneas son trayectorias del movimiento mecánico de un punto con las velocidades proporcionales a $\frac{1}{y}$, y, $\frac{1}{\sqrt{y}}$, respectivamente.

Para fundamentar esta tesis observemos, ante todo, que las fuerzas en el campo son orientadas por las normales a las líneas equipotenciales, es decir, a las líneas de igual valor de la potencial

$$(U(x, y) = \text{const}),$$

y están dirigidas hacia los valores menores de la potencial de cada

una de estas líneas (en virtud de (2) la velocidad $w = w(x, y)$ es también constante). Señalemos un sistema de líneas equipotenciales próximas una a otra. En cada una de estas líneas la velocidad w es constante, variando continuamente en las bandas entre dos líneas. En la fig. 101 mediante $w_1, w_2, \ldots, w_i, w_{i+1} \ldots$ están indicadas dichas líneas en las cuales las velocidades son $w_1, w_2, \ldots, w_i, w_{i+1}, \ldots$ respectivamente.

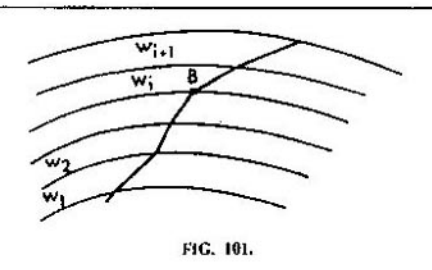


FIG. 101.

Sustituyamos ahora nuestro movimiento por el otro. Supongamos que en la banda entre las lineas, marcadas con w_i y w_{i+1}, se mantiene la velocidad constante w_i, la cual varía a saltos al pasar por la línea marcada con w_{i+1}. Nosotros alteramos la distribución de velocidades, no obstante cuanto más próximas son las líneas de separación (cuanto más estrechas son las bandas) y cuanto menores son los saltos de velocidades, tanto más próximo es la distribución irregular de velocidades a la distribución continua de partida; la última puede considerarse como un límite de las distribuciones a saltos, cuando las anchuras de las bandas tienden a cero.

Con la distribución de velocidades a saltos en lugar de las fuerzas que actúan continuamente (normales a las líneas w = const) actúan los impulsos de fuerzas, normales a las líneas de separación que causan el salto de la velocidad.

Dentro de cada banda la acción de fuerzas está ausente y el movimiento es rectilíneo. Las trayectorias se representan por las quebradas cuyos vértices se sitúan en las líneas de separación. Examinemos un tramo CBD de tal trayectoria (fig. 102). En el segmento CB la velocidad es igual a w_{i-1} y está dirigida por este segmento.

Tracemos en el punto B una tangente MN a la curva de separación y designemos con α y β los ángulos formados por los segmentos CB y BD y esta tangente. Las componentes tangentes de velocidades en el punto B, hasta y después del cambio de

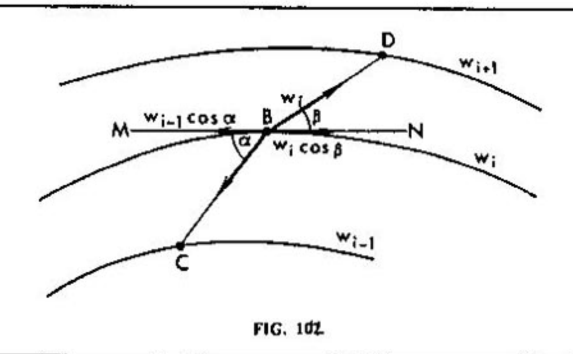


FIG. 102

dirección, son iguales, respectivamente, a

$$w_{i-1} \cos \alpha \quad \text{y} \quad w_i \cos \beta.$$

Puesto que el impulso de la fuerza está dirigida según la normal a la curva de separación en el punto B, él no cambia las componentes tangentes, es decir,

$$w_{i+1} \cos \alpha = w_i \cos \beta. \tag{5}$$

La fórmula (5) expresa el principio de refracción de una trayectoria al pasar a través de la línea de separación.

Examinemos ahora un medio óptico para el cual la velocidad de la luz es inversa a la del movimiento mecánico, $v = \frac{1}{w}$, es decir, en nuestras bandas contiguas I y II la velocidad de la luz es igual a $v_{i-1} = \frac{1}{w_{i-1}}$, $v_i = \frac{1}{w_i}$, respectivamente. En virtud del principio de refracción de la luz, en el punto B tenemos:

$$\frac{\cos \alpha}{v_{i-1}} = \frac{\cos \beta}{v_i}$$

ó

$$w_{i-1} \cos \alpha = w_i \cos \beta.$$

Así pues, *los rayos en nuestro medio óptico se refractan igual que las trayectorias en el medio mecánico.* Tanto los rayos como las trayectorias representan en sí ciertas quebradas que se refractan simultáneamente de modo igual, es decir, las trayectorias de velocidades w_i en i-sima banda coinciden con los rayos para los cuales las velocidades de la luz son $v_i = \frac{1}{w_i}$ en la misma banda. Para los medios irregulares ya hemos demostrado nuestra tesis.

En límite, cuando las anchuras de las bandas tienden a cero y nosotros obtenemos un campo mecánico con las velocidades $w = w(x, y)$ y un medio óptico con la velocidad de la luz $v = v(x, y) = \frac{1}{w(x, y)}$, las trayectorias quebradas y los rayos coincidentes se transforman en las trayectorias curvilíneas y los rayos coincidentes.

La relación entre la óptica y la mecánica, promulgada por Hamilton, desempeña un gran papel en la física moderna.

Observemos en conclusión que los métodos generales para resolver los problemas de búsqueda de los máximos y mínimos de las funcionales es un objeto de exploración del apartado matemático llamado *cálculo de variaciones.* Los fundamentos de esta materia los dieron L. Euler y J. Lagrange, brillantes matemáticos del siglo XVIII.

A NUESTROS LECTORES:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1-110, GSP, URSS.

«ALGUNAS APLICACIONES DE LA MECÁNICA A LA MATEMÁTICA»

Es bien conocida la gran aplicación de las Matemáticas en las ciencias naturales y la técnica. Pero no es menos cierto que estas últimas, y especialmente la Física, siempre han ejercido una gran influencia sobre las Matemáticas. Es más, en todos los tiempos las teorías físicas han permitido, no diremos encontrar, pero *sí* prever la respuesta a distintos problemas matemáticos. Desde este punto de vista tienen gran interés los problemas matemáticos en los que los razonamientos físicos permiten dar rápidamente una respuesta.

El pequeño libro de V. Uspenski, doctor en ciencias físico-matemáticas, está precisamente dedicado a la exposición de diversos problemas de este género. El abanico de estos problemas es muy amplio: desde el problema tan sencillo como el de la tangente a la circunferencia hasta una curiosa aplicación de razonamientos físicos a la solución de un problema de la teoria de los números. Todos estos ejemplos, tan diversos, de hecho resultan muy ligados, pues en todos ellos se emplean, para su demostración, las leyes físicas de equilibrio. La exposición no requiere conocimientos especiales y, aunque han sido orientada hacia los alumnos que han hecho ya los grados elementales de la enseñanza media, resultará también de gran interés tanto para maestros como para todos los aficionados a las Matemáticas.

Lecciones populares de matemáticas

Este año se publicarán las siguientes obras
de nuestro sello editorial
"Lecciones populares de matemáticas:

1. Bársov A.
¿Qué es la programación lineal?

2. Beskin N.
Representación de figuras espaciales

3. Boltianski V.
La envolvente

4. Markuschévich A.
Curvas maravillosas
Números complejos y representaciones conformes
Funciones maravillosas

5. Natansón I.
Problemas elementales de máximo y mínimo
Suma de cantidades infinitamente pequeñas

6. Trajtenbrot B.
Los algoritmos y la solución automática
de problemas

Editorial MIR 

Moscú